Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

47005

Unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 113.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1894.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 113.

Seite

Bohlmann, G. Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit unbestimmten Coefficienten. . . . . 207—251

Cayley, A. On the Sextic resolvent equations of ***Jacobi*** and ***Kronecker***. . 42— 49

Günther, P. Partialbruchzerlegungen in der Theorie der elliptischen Functionen. . . . . 262—266

Henneberg, L. Ueber den Fall der Statik, in welchem das virtuelle Moment einen negativen Werth besitzt. . . . . 179—185

Hensel, K. Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Theiler ihrer Discriminante. 61— 83

— — Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler einer Gattung. . . . . 128—160

— — Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. . . . . 303—317

Heymann, W. Integrable Fälle der Differentialgleichung

$$(p_5 y+p_4)\frac{dy}{dx}+p_3 y^3+p_2 y^2+p_1 y+p_0 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84— 88$$

— — Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen. (Hierzu Tafel 1.) . . . . . 267—302

Horn, J. Zur *Briot-Bouquet*schen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung. . . . . 50— 57

Kneser, A. Bemerkungen über die *Frenet-Serret*schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven. 89—101

Königsberger, L. Ueber die von *Poincaré* gegebene Erweiterung eines *Cauchy*schen Satzes von der Existenz der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungsysteme. . . . . 115—127

Mandl, M. Ueber die Zerlegung ganzer, ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren. . . . . 252—261

Seite

Meyer, A. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen. . . . . 186—206

Schütz, I. Allgemeine Lösung der Magnetisirungs-Gleichungen für den Ring. 161—178

Stäckel, P. Biegungscovarianten und Differentialparameter. . . . . 58— 60

— — Ueber Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. . . 102—114

Staude, O. Ueber permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. (Hierzu Tafel 2.) . . . . . 318—334

Vahlen, K. Th. Ueber den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungssystems. . . . . 348—352

Wallenberg, G. Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen. . . . . 1— 41

Wendt, E. Arithmetische Studien über den „letzten“ *Fermat*schen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist. . . . . 335—347

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1897. 353

Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *G. Wallenberg.*)

Einleitung.

In der vorliegenden Abhandlung soll die algebraische Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen mit Hülfe der Differentialinvarianten untersucht werden. Wir stellen daher in der Einleitung zunächst den Begriff der Differentialinvarianten fest, welche sich für die gesammte Theorie der Differentialgleichungen, insbesondere der linearen homogenen von der grössten Bedeutung erwiesen haben, und geben eine kurze historische Uebersicht über dieses Gebiet, das erst in neuerer Zeit eingehender cultivirt worden ist, aber wegen der Fruchtbarkeit und Eleganz seiner Resultate die Beachtung aller Mathematiker in hohem Masse verdient.

Es möge eine Differentialgleichung

$$\text{(I.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + n p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0,$$

in welcher die Coefficienten p_i Functionen von x sind, durch die Substitution

$$y = \varrho . v$$

transformirt werden, in welcher ϱ eine Function von x ist, während v die Function einer neuen Veränderlichen z bedeutet, die ebenfalls eine Function von x ist $(z = \psi(x))$; wird ϱ durch die Differentialgleichung

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{n-1}{2} \cdot \frac{z''}{z'}$$

bestimmt, so lautet die transformirte Differentialgleichung:

$$\text{(II.)} \qquad \frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} q_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \cdots + n q_{n-1} \frac{dv}{dz} + q_n v = 0,$$

in welcher die q_i Functionen von z bedeuten.

Lässt sich nun aus den Coefficienten p_i und deren Ableitungen ein rationaler Ausdruck a_r derart bilden, dass, wenn der entsprechende Ausdruck in den q_i mit α_r bezeichnet wird,

$$\alpha_r . z^{jr} = a_r$$

ist, so nennt man a_r eine ***relative Differentialinvariante*** vom Gewicht r; die Invarianten vom Gewicht 0 heissen ***absolute*** Invarianten. Man wählt die Differentialgleichung (I.) in dieser des zweiten Gliedes beraubten Form, auf welche sie ja stets durch eine bekannte Transformation gebracht werden kann, weil dadurch die Bildung der Differentialinvarianten ungemein erleichtert wird. — Um die Differentialinvarianten einer ***vollständigen*** Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + \mathfrak{p}_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{p}_{n-1} \frac{du}{dx} + \mathfrak{p}_n u = 0$$

zu finden, bringe man dieselbe zunächst durch die Substitution

$$u = e^{-\frac{1}{n}\int \mathfrak{p}_1 dx} . y = \mu . y$$

auf die Form (I.)*). Die gesuchten Invarianten treten bei der Transformation

$$y = \varrho . v,$$
$$z = \psi(x)$$

auf, durch welche gleichzeitig die abhängige und die unabhängige Variable geändert wird und die Differentialgleichung (I.) in (II.) übergeht. Die Differentialgleichung (II.) kann dann noch durch die Substitution

$$v = e^{\frac{1}{n}\int \mathfrak{q}_1 dz} . w = \nu . w$$

in eine Differentialgleichung

$$\text{(B.)} \qquad \frac{d^n w}{dz^n} + \mathfrak{q}_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1} \frac{dw}{dz} + \mathfrak{q}_n w = 0$$

mit ***vorgeschriebenem*** $\mathfrak{q}_1$ transformirt werden. Die Differentialgleichung (A.) geht demnach in (B.) durch die Transformation

$$u = \mu\varrho\nu . w = \sigma . w$$

über.

---

*) Es ist leicht ersichtlich, dass die Ausdrücke der p_i in den $\mathfrak{p}_i$ und deren Ableitungen für alle Transformationen $u = \chi(x).t$, bei welchen die unabhängige Variable unverändert bleibt, invariant sind.

Der erste, welcher den Begriff der Differentialinvariante klar erfasst und wirklich aufgestellt hat, ist *Laguerre*; dieser hat im Jahre 1879 in den Comptes Rendus zwei kleine Arbeiten darüber veröffentlicht*), welche sich hauptsächlich auf Differentialgleichungen dritter Ordnung beziehen. In demselben Jahre dehnte *Brioschi* in einem an *Laguerre* gerichteten Briefe**) diese Untersuchungen auf die Differentialgleichungen vierter Ordnung aus. Allerdings ist, wie *Harley****) nachweist, *Cockle* bereits im Jahre 1868†) dem Gedanken der Differentialinvariante sehr nahe gekommen; er nennt die in der unten angegebenen Arbeit zuerst für Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgestellten Ausdrücke, welche bei einer Transformation der abhängigen Variabeln ungeändert bleiben, „criticoids". In einer späteren im Jahre 1876 erschienenen Arbeit††) betrachtet *Cockle* für die linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung zwei Systeme von Criticoiden, welche bei einer Transformation der abhängigen bzw. der unabhängigen Variablen ungeändert bleiben; es fehlte also nur noch der Schritt zur Aufstellung von Ausdrücken, die bei *gleichzeitiger* Transformation der beiden Veränderlichen invariante Eigenschaften besitzen†††).

Einen grossen Fortschritt auf dem Gebiete der Differentialinvarianten bezeichnet die umfangreiche von der französischen Akademie preisgekrönte Arbeit von *Halphen**†), welche im Jahre 1882 veröffentlicht wurde. Die in dieser Arbeit enthaltenen allgemeinen Untersuchungen über Differentialinvarianten befinden sich im dritten Kapitel: *Halphen* weist dort zunächst

---

*) Comptes Rendus, t. 88, p. 116—119 (20. Januar) „Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre" und p. 224—227 (3. Februar) „Sur quelques invariants des équations différentielles".

**) „Sur les équations différentielles linéaires", Bulletin de la société mathématique de France, t. VII, p. 105—108 (Extrait d'une lettre à M. *Laguerre*), 11. April 1879.

***) „Prof. *Malet*'s classes of invariants identified with Sir *James Cockle*'s criticoids", Roy. Soc. Proc., vol. 38, (1884), p. 44—57; daselbst findet man auch eine genaue Angabe der Abhandlungen von *Cockle*.

†) „On the integration of differential equations", Educ. Times, IX, p. 105—112.

††) „On linear differential equations of the third order," Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, vol. XIV, p. 340—353.

†††) Solche Ausdrücke, welche bei der Transformation nur *einer* Variablen invariante Eigenschaften zeigen, heissen jetzt *Semiinvarianten*.

*†) „Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables", Mémoires des Savants Etrangers, vol. 28 (1883/84), No. 1, p. 301. (Grand Prix des Sciences Mathématiques, année 1880; veröffentlicht 1882).

die Identität der Invarianten von *Laguerre* und *Brioschi* mit gewissen von ihm selbst bereits im Juli 1878 gefundenen Functionen nach*); darauf begründet er die Existenz der Differentialinvarianten a priori, indem er sie aus der Existenz von Invarianten der homogenen zwischen den Integralen der Differentialgleichung bestehenden Relationen ableitet; er zeigt ferner, dass die absoluten Invarianten sich stets als Quotienten relativer Invarianten von demselben Gewichte**) darstellen lassen und dass die letzteren in Bezug auf das Gewicht ihrer Terme homogen sind. Er giebt dann eine allgemeine Methode für die Bildung der Invarianten durch Verbindung der allgemeinen linearen homogenen Differentialgleichung mit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung an, stellt die Fundamentalinvariante vom Gewicht 3 wirklich auf und beweist, dass ihre Form für die linearen Differentialgleichungen jeder beliebigen Ordnung erhalten bleibt. Ausser dieser und der Fundamentalinvariante vom Gewicht 4 für die Differentialgleichungen vierter Ordnung werden aber keine anderen Invarianten wirklich berechnet, sondern lediglich Anwendungen der erhaltenen Resultate gegeben. In einer zweiten Arbeit***) stellt *Halphen* für die Differentialgleichungen vierter Ordnung zwar eine zahllose Menge neuer Invarianten auf; die Resultate werden aber dadurch, dass dies nicht nach einem bestimmten Princip geschieht, etwas unklar und unübersichtlich; auch diese Arbeit enthält zahlreiche Anwendungen der Differentialinvarianten, welche sich besonders auf solche Differentialgleichungen vierter Ordnung beziehen, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind.

Um die *formale* Seite der Theorie der Differentialinvarianten, d. h. um die wirkliche Berechnung derselben, hat sich besonders *Forsyth*†) ververdient gemacht; insbesondere gebührt ihm das Verdienst, zuerst für die *allgemeine* lineare homogene Differentialgleichung die Invarianten von höherem

---

*) Thèse pour le doctorat: „Sur les invariants différentiels“, Paris, 1878.

**) *Halphen* nennt die Zahl $m+n$ das Gewicht des Gliedes $\frac{d^n p_m}{dx^n}$; dieselbe stimmt, wie man sich leicht überzeugt, mit der von uns (S. 2) „Gewicht“ genannten Zahl überein.

***) „Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre“, Acta Mathematica, Band III, p. 325—380 (1883).

†) „Invariants, covariants and quotient-derivatives associated with linear differential equations“, Philosophical Transactions, vol. 179 (1888), p. 377—489. Die Einleitung dieser Arbeit enthält eine vortreffliche historische Uebersicht über das Gebiet der Differentialinvarianten, welche ich zum Theil benutzt habe.

als dem dritten Gewicht (und zwar bis zum siebenten) wirklich berechnet zu haben. Von seinen Resultaten heben wir für unseren Zweck das folgende hervor*): In einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung (I.) giebt es für jeden (dem Gewicht entsprechenden) Index von 3 bis n eine einzige nicht zusammengesetzte „lineare" unabhängige Invariante, also im ganzen $n-2$ lineare Invarianten; jede derselben besteht aus zwei Theilen:

a) einem Theile, welcher *linear* in den Coefficienten p_i der Differentialgleichung (I.) und deren Ableitungen ist, wobei jedes Glied dasselbe Gewicht („dimension-number") besitzt;

b) einem Theile, welcher in Bezug auf diese Grössen vom zweiten oder höheren Grade ist, wobei jedes Glied ebenfalls dasselbe Gewicht hat und entweder p_2 oder eine Ableitung von p_2 als Factor enthält.

Forsyth macht noch die interessante Bemerkung, dass der lineare Theil dieser Invarianten von der Ordnung der Differentialgleichung unabhängig ist, also für alle Differentialgleichungen erhalten bleibt; daher kommt es auch, dass die Invariante vom Gewicht 3, die *nur* aus einem linearen Theil besteht, sich für die Differentialgleichungen jeder beliebigen Ordnung erhält. Den Namen „lineare Invarianten" wählt ***Forsyth*** aus folgendem Grunde: Durch die Auflösung einer gewissen Differentialgleichung zwischen den beiden unabhängigen Veränderlichen kann die ursprüngliche Differentialgleichung auf eine „kanonische" Form gebracht werden, in welcher nicht nur p_1, sondern auch p_2 verschwindet**). Für die Differentialgleichung in ihrer kanonischen Form verschwindet daher der *nicht* lineare Theil der Differentialinvarianten, so dass dieselben wirklich „linear" sind. Durch diese Reduction auf die kanonische Form gelingt es ***Forsyth*** auch, den *allgemeinen* Ausdruck der linearen Differentialinvariante aufzustellen, d. h. nicht nur die Form, sondern auch die numerischen Coefficienten***). Aus den linearen Invarianten leitet ***Forsyth*** noch andere ab, von denen wir die „Quadrin-

---

*) l. c. p. 402.

) Dies Resultat ist bereits von ***Cockle* in der oben citirten Arbeit vom Jahre 1876, p. 346 für die Differentialgleichungen dritter Ordnung, von ***Laguerre*** (C. R., t. 88, (1879), p. 226) für die ***allgemeine*** Differentialgleichung gefunden worden. — Setzt man $\frac{z''}{z'} = -2\frac{\theta'}{\theta}$, so lautet die aufzulösende Differentialgleichung: $\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{3}{n+1}p_2\theta = 0$.

***) Für die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \sum_{r=3}^{r=n} \frac{n!}{r!(n-r)!} Q_r \frac{d^{n-r}u}{dz^{n-r}} = 0$$

variants“ hervorheben (cfr. p. 9); der übrige Theil der umfangreichen Arbeit dieses Autors ist für uns nicht von wesentlicher Bedeutung.

An die Arbeit von ***Forsyth*** schliesst sich eng diejenige von ***Brioschi*** aus dem Jahre 1890*) an: ***Brioschi*** bringt die von ***Forsyth*** berechneten Invarianten in eine etwas elegantere Form und giebt den Ausdruck des linearen Theiles der allgemeinen Differentialinvariante für die ***nicht*** kanonische Form der Differentialgleichung (I.). Da nach Obigem durch die Transformation auf die kanonische Form die functionale Beziehung zwischen den beiden unabhängigen Veränderlichen bereits festgelegt ist, unsere Untersuchungen aber in dieser Beziehung freie Wahl erfordern, so schliessen wir uns im Folgenden der Bezeichnungsweise ***Brioschi***s an. — Ferner giebt ***Brioschi*** eine Methode an, den ***nicht*** linearen Theil der Differentialinvarianten zu berechnen, indem er ähnlich wie ***Halphen*** eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zu Hülfe nimmt, und leitet daraus einige bemerkenswerthe Resultate ab (cfr. p. 15 und p. 36); sodann setzt er aus zwei Invarianten a_r und a_s eine neue $a_{r,s}$ zusammen (cfr. p. 8); den Schluss dieser Arbeit endlich bilden Anwendungen der Invariantentheorie auf lineare homogene Differentialgleichungen dritter, vierter und fünfter Ordnung mit homogenen, und zwar hauptsächlich quadratischen Relationen zwischen ihren Integralen. Um diese historische Uebersicht über das Gebiet der Differentialinvarianten zu vervollständigen, seien u. a. noch die Arbeiten von ***Malet*****) (1882) und von ***David******) (1884) genannt, die wir, da sie nicht wesentlich Neues enthalten, bei der Darlegung des Entwickelungsganges dieser Disciplin übergangen haben. Neuerdings hat Herr ***Stäckel***†) gezeigt, dass die hier angewendeten Transformationen die ***einzigen*** sind, welche eine

---

lautet die lineare Differentialinvariante vom Gewicht σ ($\sigma = 3, \ldots, n$):

$$\Theta_\sigma(z) = Q_\sigma + \tfrac{1}{2}\sigma \sum_{r=1}^{r=\sigma-3} (-1)^r a_{r,\sigma} \frac{d^r Q_{\sigma-r}}{dz^r},$$

$$a_{1,\sigma} = 1, \quad a_{r,\sigma} = \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)^2(\sigma-3)^2\ldots(\sigma-r+1)^2(\sigma-r)}{2.3\ldots r(2\sigma-3)(2\sigma-4)\ldots(2\sigma-r-1)};$$

$\Theta_\sigma(z)$ ist in der That von der Ordnung n der Differentialgleichung unabhängig.

*) „Les invariants des équations différentielles linéaires“, Acta Mathematica, Band 14, p. 233—248.

**) „On a class of invariants“, Phil. Trans., vol. 173, (1882), p. 751—776.

***) „Sur une transformation de l'équation différentielle linéaire d'un ordre quelconque“, Bullet. de la Soc. Math. de France, t. XII, p. 36—42.

†) Dieses Journal, Bd. 111 (1893), p. 290—302.

lineare homogene Differentialgleichung höherer als erster Ordnung in eine eben solche überführen, und dadurch der Theorie der Differentialinvarianten eine feste Basis geben. ***Forsyth, Sylvester, Elliot*** u. a. haben auch invariante bzw. covariante Gebilde anderer Art als die hier angegebenen betrachtet; dieselben sind aber für uns von geringerer Wichtigkeit. Die Literatur darüber findet man in dem „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie“ von ***Franz Meyer*** (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I, p. 230 sqq.).

§ I.

Die Arbeiten von ***Forsyth*** und ***Brioschi*** setzen uns nun in den Stand, ein Problem aus der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen ***allgemein*** zu lösen, welches zuerst von Herrn ***Fuchs****) für die dritte Ordnung, sodann von Herrn ***Ludwig Schlesinger*****) für die vierte Ordnung gelöst worden ist. Dieses Problem besteht in der Untersuchung derjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung, deren Fundamentalintegrale $n-2$ homogenen Relationen höheren als ersten Grades genügen, und zwar handelt es sich dabei hauptsächlich um die Frage der algebraischen Integrirbarkeit. Dasselbe Problem haben von ganz anderem Gesichtspunkte aus, unter stricter Benutzung der Differentialinvarianten die Herren ***Lipm. Schlesinger******) und ***M. Meyer***†) in ihren Dissertationen für den dritten bzw. vierten Grad behandelt. Ich schliesse mich bei der Behandlung des ***allgemeinen*** Problems der letzteren Methode an††).

Herr ***Brioschi*** nimmt in seiner oben citirten Arbeit vom Jahre 1890 das, wie in der Einleitung hervorgehoben, bereits von ***Forsyth*** gefundene Resultat auf, dass für jede homogene lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung (I.) $n-2$ fundamentale Differentialinvarianten existiren: er nennt dieselben $a_3, a_4, \ldots, a_n$; dabei giebt der Index gleichzeitig das Gewicht der betreffenden relativen Invariante an. Die sieben ersten ebenfalls bereits

---

*) Acta Mathematica, Band I, p. 321—362 (1882.)

**) Inauguraldissertation, Berlin, 1887.

***) Inauguraldissertation, Berlin, 1888.

†) Inauguraldissertation, Berlin, 1893.

††) Die Paragraphen I und II enthalten naturgemäss eine directe Erweiterung der von den Herren ***Lipm. Schlesinger*** und ***Meyer*** aufgestellten Sätze; die Schwierigkeit liegt in der Gruppirung und Behandlung der Ausnahmefälle.

von *Forsyth* berechneten Differentialinvarianten lauten in der *Brioschi*schen Bezeichnungsweise*):

$$(1.)\quad \begin{cases} a_3 = p_3 - \frac{3}{2}p_2', \\ a_4 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5}p_2'' - \frac{3}{5}\frac{5n+7}{n+1}p_2^2, \\ a_5 = p_5 - \frac{5}{2}p_4' + \frac{15}{7}p_3'' - \frac{5}{7}p_2''' - \frac{10}{7}\frac{7n+13}{n+1}p_2 a_3, \\ a_6 = p_6 - 3p_5' + \frac{10}{3}p_4'' - \frac{5}{3}p_3''' + \frac{5}{14}p_2^{IV} - 5\frac{3n+7}{n+1}p_2 a_4 \\ \qquad - \frac{7n+8}{14(n+1)}(4p_2p_2'' - 5p_2'^2) - \frac{3}{7}\frac{35n^2+112n+93}{(n+1)^2}p_2^3, \\ a_7 = p_7 - \frac{7}{2}p_6' + \frac{105}{22}p_5'' - \frac{35}{11}p_4''' + \frac{35}{33}p_3^{IV} - \frac{7}{44}p_2^V \\ \qquad - \frac{21}{11}\frac{11n+31}{n+1}p_2 a_5 - \frac{9}{22}\frac{385n^2+1728n+1919}{(n+1)^2}p_2^2 a_3 \\ \qquad - \frac{3n+4}{11(n+1)}\cdot[10p_2 a_3'' - 35p_2' a_3' + 31p_2'' a_3]. \end{cases}$$

So besteht jede Invariante a_r aus einem linearen und einem nicht linearen Theile; der lineare Theil von a_r lautet:

$$\Sigma_s A_{r,s}\left[p_{r-2s}^{(2s)} - \frac{(r-2s)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)}p_{r-2s-1}^{(2s+1)}\right],$$

wo

$$A_{r,0} = 1, \quad A_{r,s+1} = \frac{(r-2s-2)(r-2s-1)^2(r-2s)}{4(s+1)(2s+1)(r-s-1)(2r-2s-3)}A_{r,s}$$

ist. Jedes Glied des nicht linearen Theiles der Differentialinvariante enthält nach dem in der Einleitung angeführten Theoreme *Forsyth*s als Factor eine Potenz von p_2 oder einer Ableitung von p_2, und alle diese Invarianten sind in Bezug auf das Gewicht homogen. — Ferner lehrt Herr *Brioschi***), wie man aus je zweien solcher Differentialinvarianten a_r und a_s eine neue Invariante $a_{r,s}$ vom Gewichte $r+s+2$ ableiten kann, nämlich:

$$a_{r,s} = \frac{12rs}{n+1}p_2 a_r a_s + \frac{(2r+1)(2s+1)}{r+s+1}a_r' a_s' - \frac{r(2r+1)}{r+s+1}a_r a_s'' - \frac{s(2s+1)}{r+s+1}a_s a_r''.$$

Setzt man hierin $r = s$, so erhält man eine Invariante $a_{r,r}$ vom Gewichte $2r+2$:

$$a_{r,r} = \frac{12r^2}{n+1}p_2 a_r^2 + (2r+1)a_r'^2 - 2r a_r a_r''.$$

*) l. c. p. 235.
**) l. c. p. 237.

Dividirt man diese durch a_r^2, so resultirt eine Invariante vom Gewichte 2, die ich mit b_r bezeichnen will*):

$$b_r = \frac{a_{r,r}}{a_r^2} = \frac{12r^2}{n+1} p_2 + (2r+1)\left(\frac{a_r'}{a_r}\right)^2 - 2r\,\frac{a_r''}{a_r}.$$

Es leuchtet ein, dass die Invariante b_r ihren Sinn verliert, wenn a_r verschwindet. Man erhält diese Invariante auch direct aus a_r, indem man aus der Gleichung

$$z''' = \frac{a_r}{\alpha_r}$$

durch zweimalige logarithmische Differentiation die Werthe von $\frac{z''}{z'}$ und $\frac{z'''}{z'}$ bildet und dieselben in die zwischen p_2 und q_2 bestehende Gleichung**):

$$q_2 z'^2 = p_2 + \frac{n+1}{2.3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 - \frac{z'''}{z'}\right] \tag{2.}$$

einsetzt***).

Wir haben so für die Differentialgleichung (I.) $2(n-2) = 2n-4$ Invarianten gewonnen, die $n-2$ Fundamentalinvarianten a_r vom Gewichte r $(r = 3, 4, \ldots, n)$ und die $n-2$ abgeleiteten Invarianten b_r, die sämmtlich vom Gewichte 2 sind; die Invarianten a_r und b_r sind für alle aus (I.) durch $y = \varrho.v$, $z = \psi(x)$ transformirten Differentialgleichungen gleichzeitig Null oder von Null verschieden. — Diese Invarianten nun reichen zur Behandlung des Problemes, welches wir im Auge haben, vollständig aus. —

Die Ausdrücke

$$\frac{a_k^l}{a_l^k} \qquad \begin{pmatrix} k = 3, 4, \ldots, n-1 \\ l = 4, 5, \ldots, n \\ k < l \end{pmatrix} \tag{3.}$$

sind absolute Invarianten, ebenso die Ausdrücke

$$\frac{a_r^2}{b_r^r} \qquad (r = 3, 4, \ldots, n). \tag{4.}$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\alpha_k^l}{\alpha_l^k} = \frac{a_k^l}{a_l^k}, \tag{5.}$$

$$\frac{\alpha_r^2}{\beta_r^r} = \frac{a_r^2}{b_r^r} \tag{6.}$$

*) Die entsprechende Invariante der transformirten Differentialgleichung möge β_r genannt werden.

**) *Brioschi*, l. c. p. 233, 234.

***) Vergl. *Forsyth*, l. c. p. 407 (Quadrinvariants).

ergiebt sich daher, wenn auch nur in *einer* derselben nicht jede Seite für sich einen constanten Werth hat (wozu auch die Werthe 0 und ∞ zu rechnen sind), eine algebraische Beziehung zwischen z und x, den unabhängigen Variabeln der transformirten und der ursprünglichen Differentialgleichung, vorausgesetzt, dass beide algebraische Coefficienten besitzen*). Eine genauere Fixirung derjenigen Ausnahmefälle, in denen sich keine algebraische Beziehung zwischen z und x ergiebt, folgt später in § III. — Führt man noch die aus (3.) und (4.) durch logarithmische Differentiation entstehenden relativen Invarianten vom Gewichte 1

$$(7.) \qquad l\frac{a_k'}{a_k} - k\frac{a_l'}{a_l} = d_{k,l}$$

und

$$(8.) \qquad 2\frac{a_r'}{a_r} - r\frac{b_r'}{b_r} = f_r$$

ein, welche wieder mit den entsprechenden der transformirten Differentialgleichung gleichzeitig verschwinden oder von Null verschieden sind, so kann man folgenden Satz aussprechen:

„Wenn eine Differentialgleichung (A.)**) mit algebraischen Coefficienten, für welche nicht *alle* Invarianten $d_{k,l}$ und f_r identisch verschwinden bzw. ihren Sinn verlieren, durch die Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$u = \sigma(x).w$$

in eine Differentialgleichung (B.) mit ebenfalls algebraischen Coefficienten übergeht, so ist die Transformationsfunction $\psi(x)$ eine algebraische Function von x."

Da $\sigma(x)$ die Form hat:

$$\sigma(x) = e^{-\frac{1}{n}\int \mathfrak{p}_1 dx} . e^{-\frac{n-1}{2}\int \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} dx} . e^{\frac{1}{n}\int \mathfrak{q}_1 dz}$$
$$= [\psi'(x)]^{-\frac{n-1}{2}} . e^{-\frac{1}{n}\int \mathfrak{p}_1 dx} . e^{\frac{1}{n}\int \mathfrak{q}_1 \psi'(x) dx},$$

so ergiebt sich weiter:

---

*) Die absoluten Invarianten $\frac{a_k^2}{b_l^k}$ und $\frac{b_k}{b_l}$ besonders aufzuführen, ist unnöthig; denn, wie man sich leicht überzeugt, haben auch diese constante Werthe, wenn das bei *allen* Invarianten (3.) und (4.) der Fall ist; ferner sind aus der obigen Reihe der absoluten Invarianten auch diejenigen fortzulassen, welche ihren Sinn verlieren (vgl. p. 9), z. B. hat $\frac{a_r^2}{b_r^r}$ keinen Sinn, wenn a_r verschwindet.

**) Vgl. Einleitung, p. 2.

„Sind die Integrale einer Differentialgleichung (A.), für welche nicht alle Invarianten $d_{k,l}$ und f_r identisch verschwinden bzw. ihren Sinn verlieren, sämmtlich algebraisch und geht dieselbe durch die Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$u = \sigma(x).w$$

in eine Differentialgleichung (B.) mit algebraischen Coefficienten über, so unterscheiden sich die Integrale der Differentialgleichung (B.) von algebraischen Functionen nur durch einen allen gemeinsamen Factor, dessen logarithmische Ableitung selber eine algebraische Function von x ist."

Dieser Factor $\sigma(x)$ kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\sigma(x) = \psi'(x)^{-\frac{n-1}{2}} . \Delta^{\frac{1}{n}} . \left[e^{\frac{1}{n}\int \mathfrak{q}_1 dz}\right]_{z=\psi(x)},$$

worin Δ die Fundamentaldeterminante eines Systemes von Integralen der Differentialgleichung (A.) bedeutet. Da ψ und Δ algebraische Functionen von x sind, so lautet der Bestandtheil von σ, welcher nicht algebraisch zu sein braucht:

$$\left[e^{\frac{1}{n}\int \mathfrak{q}_1 dz}\right]_{z=\psi(x)}.$$

Ist also noch $\mathfrak{q}_1(z)$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function, so ist $\sigma(x)$ selber eine algebraische Function von x, folglich auch von z. In diesem Falle sind daher die Integrale der Differentialgleichung (B.) algebraisch in z.

§ II.

a) Es möge zwischen den n monogenen Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Variablen x das irreductible System von $n-2$ homogenen Relationen höheren als ersten Grades mit constanten Coefficienten bestehen:

$$(1.) \qquad f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Setzt man

$$\frac{y_i}{y_1} = \mathfrak{y}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

so sind die Grössen $\mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_4, \ldots, \mathfrak{y}_n$ durch die Gleichungen (1.) als algebraische Functionen von $\mathfrak{y}_2$ bestimmt:

$$(2.) \qquad \mathfrak{y}_l = h_l(\mathfrak{y}_2) \qquad (l = 3, \ldots, n).$$

Es möge ferner dasselbe Gleichungssystem (1.) noch durch n andere Func-

tionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ der Variablen z befriedigt werden, sodass sich, wenn man analog

$$\frac{Y_i}{Y_1} = \mathfrak{Y}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

setzt, die Grössen $\mathfrak{Y}_3, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ als dieselben algebraischen Functionen von $\mathfrak{Y}_2$ ergeben:

(3.) $$\mathfrak{Y}_l = h_l(\mathfrak{Y}_2) \qquad (l = 3, \ldots, n).$$

Es sei nun:

(4.) $$\mathfrak{y}_i = g_i(x) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

und

(4*.) $$\mathfrak{Y}_i = G_i(z) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Verbindet man dann die beiden unabhängigen Veränderlichen x und z durch die Relation

(5.) $$g_2(x) = G_2(z),$$

woraus sich

(5*.) $$x = \varphi(z)$$

oder

(5**.) $$z = \psi(x)$$

ergeben möge, derart, dass identisch

$$g_2(\varphi(z)) = G_2(z)$$

und

$$g_2(x) = G_2(\psi(x))$$

ist, oder, wie man es auch ausdrücken kann, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{Y}_2$ durch die Substitution (5*.) bzw. (5**.) in einander übergehen: so gehen infolge der Gleichungen (2.) und (3.) gleichzeitig auch $\mathfrak{y}_3, \ldots, \mathfrak{y}_n$ und $\mathfrak{Y}_3, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ beziehentlich in einander über. Die n Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Veränderlichen x unterscheiden sich daher, wenn man sie durch die Substitution (5*.) transformirt, als Functionen der Veränderlichen z aufgefasst, von den Functionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ der Variablen z nur durch den allen gemeinsamen Factor $\frac{y_1}{Y_1}$, der als Function von z oder x angesehen werden kann. Betrachtet man also $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ als Fundamentalintegrale zweier linearen homogenen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung (y, x) und (v, z)*), so kann man folgenden Satz aussprechen:

*) (y, x) bedeutet: unabhängige Veränderliche x, abhängige Veränderliche y.

„Wenn zwischen den Fundamentalintegralen zweier homogenen linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung (y, x) und (v, z) dasselbe irreductible System $n-2$ homogener Relationen besteht*), so lassen sich diese Differentialgleichungen durch eine Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$y = \varrho(x).v$$

in einander überführen."

b) Es möge nunmehr zwischen den n Integralen eines Fundamentalsystemes einer linearen homogenen Differentialgleichung (B.) (w, z) das irreductible System $n-2$ homogener Relationen*)

$$(1.) \qquad f_k(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2)$$

bestehen. Wählt man zwei *beliebige* algebraische Functionen einer Variablen x, deren Quotient nur nicht constant ist:

$$u_1 = g_1(x), \quad u_2 = g_2(x),$$

und bestimmt durch die Relationen

$$(1^*.) \qquad f_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2)$$

auch $u_3, u_4, \ldots, u_n$ als algebraische Functionen von x:

$$u_3 = g_3(x), \quad u_4 = g_4(x), \quad \ldots, \quad u_n = g_n(x),$$

so besteht zwischen den $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, weil sich sonst die Verhältnisse je zweier $g_i(x)$ als constant ergeben würden, während doch $g_2(x) : g_1(x)$ als *nicht* constant gewählt worden war; man kann daher die $g_i(x)$ als Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit algebraischen Coefficienten (A.) (u, x) auffassen. Setzt man nun voraus, dass für die Differentialgleichung (B.) (w, z) nicht alle Invarianten $d_{k,l}$ und f_r identisch verschwinden bzw. ihren Sinn verlieren, so fliesst aus den Entwickelungen in § I und § II, a) der folgende Satz:

„Wenn zwischen den Integralen eines Fundamentalsystemes einer linearen homogenen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten (B.) (w, z), für welche nicht gleichzeitig die Invarianten $d_{k,l}$ und f_r verschwinden oder ihren Sinn verlieren, die Relationen (1.) bestehen, so unterscheiden

---

*) Es liegt in dem Begriffe der Fundamentalintegrale, dass keine der $n-2$ homogenen Relationen selbst oder eine daraus resultirende Relation *linear* sein darf.

sich sämmtliche Integrale derselben von algebraischen Functionen der unabhängigen Veränderlichen nur durch einen allen gemeinsamen Factor, dessen logarithmische Ableitung ebenfalls eine algebraische Function ist. — Ist noch der Coefficient der $(n-1)$-ten Ableitung $q_1(z)$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function, so sind die Integrale der Differentialgleichung (B.) selber algebraisch."

§ III.

Wir kommen jetzt zur genaueren Fixirung der Ausnahmefälle, d. h. derjenigen Fälle, in welchen dadurch, dass *alle* Invarianten $d_{k,l}$ und f_r verschwinden bzw. ihren Sinn verlieren, sich *keine* algebraische Beziehung zwischen den unabhängigen Veränderlichen z und x ergiebt. Wir werden zunächst beweisen, dass sich in *allen* diesen Fällen die vorgelegte Differentialgleichung, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit sogleich in der Form (I.) der Einleitung voraussetzen können, durch eine geeignete Substitution in eine solche *mit constanten Coefficienten* transformiren lässt. Um diesen Beweis zu führen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1) Alle Invarianten a_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ sind identisch Null, also:

$$a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad \ldots, \quad a_n = 0.$$

In diesem Falle lässt sich die Differentialgleichung (I.) (y, x) durch die Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$y = \varrho(x).v,$$

worin z durch die Gleichung

$$p_2 + \frac{n+1}{2.3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 - \frac{z'''}{z'}\right] = 0$$

als Function von x bestimmt wird, auf die einfache Differentialgleichung

$$\frac{d^n v}{dz^n} = 0 \tag{1.}$$

transformiren: zunächst folgt aus der Gleichung (2.) des § I, dass in der transformirten Differentialgleichung $q_2 = 0$ sein muss, dann successive aus $a_3 = 0$, dass $q_3 = 0$, aus $a_4 = 0$, dass $q_4 = 0$, etc., endlich aus $a_n = 0$, dass $q_n = 0$ ist: man hat nur zu berücksichtigen, dass nach dem in der Einleitung angeführten Satze von *Forsyth* (p. 4, vgl. auch p. 8) a_k sich als ganze rationale Function von $p_2, p_3, \ldots, p_k$ und deren Ableitungen darstellt,

welche in bezug auf das Gewicht ihrer Terme *homogen* (und zwar vom Gewichte k) ist.

Die Differentialgleichung (1.) besitzt die Integrale

$$1, \quad z, \quad z^2, \quad \ldots, \quad z^{n-1};$$

zwischen denselben bestehen, wenn $y_k = z^k$ gesetzt wird, die $n-2$ parabolischen Relationen

$$(2.) \qquad y_k^2 - y_{k-1} \cdot y_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

Umgekehrt folgt mit Hülfe der in § II, a) entwickelten Principien aus der Existenz dieser Relationen das Verschwinden sämmtlicher Invarianten a_k, da diese für die Differentialgleichung (1.) selbstverständlich Null sind. Herr *Brioschi**) zeigt, dass sich überdies in diesem Falle die Integrale durch eine binäre Form $(n-1)$-ten Grades mit constanten Coefficienten zweier Argumente ξ_1, ξ_2 darstellen lassen, welche Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind**).

2) Es sind *nicht* alle Invarianten a_k $(k = 3, 4, \ldots, n)$ identisch gleich Null. Es sei also:

$$a_{k_1}, \quad a_{k_2}, \quad \ldots, \quad a_{k_i} = 0, \qquad (i < n-2)$$

$$a_{l_1}, \quad a_{l_2}, \quad \ldots, \quad a_{l_{n-i-2}} \neq 0,$$

wo die Indices $k_1, k_2, \ldots, k_i$ und $l_1, l_2, \ldots, l_{n-i-2}$ von einander verschiedene nach der Grösse geordnete Zahlen aus der Reihe 3, 4, …, n bedeuten, derart, dass

$$k_r < k_{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, i-1)$$

und

$$l_s < l_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-i-3),$$

Damit sich nach § I (p. 9 u. 10) keine algebraische Beziehung zwischen den unabhängigen Variablen x und z der ursprünglichen und der transformirten Differentialgleichung ergebe, muss zunächst

$$d_s = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-i-2)$$

sein, wenn

$$l_s \frac{a'_{l_1}}{a_{l_1}} - l_1 \frac{a'_{l_s}}{a_{l_s}} = d_s$$

---

*) l. c. p. 237.

**) Vgl. auch *Rosenkranz*, Inauguraldissertation, Halle, 1890.

gesetzt wird. Es sind ferner zwei Unterfälle zu unterscheiden, nämlich

$$\text{a)} \quad b_{l_1},\ b_{l_2},\ \ldots,\ b_{l_{n-2-i}} = 0,$$

$$\text{b)} \quad b_{l_1},\ b_{l_2},\ \ldots,\ b_{l_{n-2-i}} \neq 0^{*}).$$

Im Falle b) müssen die Invarianten

$$f_{l_h} = 2\frac{a'_{l_h}}{a_{l_h}} - l_h\frac{b'_{l_h}}{b_{l_h}} = 0^{**}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-2-i)$$

sein, damit sich nach § I, p. 9 u. 10 keine algebraische Beziehung zwischen z und x ergebe.

Wir betrachten zuerst den Fall a): Transformirt man die vorgelegte Differentialgleichung (I.) der Einleitung, welche von nun an kurz mit (y, x, p) bezeichnet werden möge, durch die Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$y = \varrho.v,$$

wo die Function $\psi(x)$ durch die Gleichung

$$a_{l_1} = \alpha_{l_1}.\psi'(x)^{l_1}$$

bestimmt wird, in welcher α_{l_1} eine willkürliche von Null verschiedene Constante bedeutet, so lässt sich leicht zeigen, dass die Coefficienten der so transformirten Differentialgleichung (II.) (v, z, q) sämmtlich Constanten sind. Es sind nämlich infolge von $d_s = 0$ $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$ die Grössen $\frac{a_{l_s}^{l_1}}{a_{l_1}^{l_s}}$ Constanten, welche ich mit c_s bezeichnen will; daher ist in der transformirten Differentialgleichung auch $\alpha_{l_s} = \alpha_{l_1}^{\frac{l_s}{l_1}}.c_s^{\frac{1}{l_1}}$ eine Constante. Zunächst folgt nun aus

$$b_{l_1} = \beta_{l_1} = 0,$$

dass $q_2 = 0$ sein muss; ferner ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen (1.)

---

*) Die Invarianten $b_{l_1}, b_{l_2}, \ldots, b_{l_{n-2-i}}$ sind *gleichzeitig* Null oder von Null verschieden, wenn die Invarianten $d_s = 0$ sind $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$; man findet nämlich unter Berücksichtigung von $d_s = 0$:

$$b_{l_s} = \frac{l_s^2}{l_1^2} b_{l_1} \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-2-i).$$

**) Wenn die $d_s = 0$ $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$, so sind die Invarianten f_{l_h} ebenfalls *gleichzeitig* Null oder von Null verschieden.

des § I:

$$q_3 = \alpha_3 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $l_1 =$ oder > 3 ist; dann aus der zweiten dieser Gleichungen, dass $q_4 = \alpha_4$ (also eine Constante) oder $= 0$ ist, je nachdem eine der Zahlen l_1, l_2 gleich 4 oder beide grösser als 4 sind. So kann man successive weiter schliessen und kommt auf diese Weise durch die Methode der vollständigen Induction zu dem Resultat, dass in der transformirten Differentialgleichung die Coefficienten theilweise gleich Null, theilweise von Null verschiedene Constanten sind, da, wie schon hervorgehoben worden, a_k eine ganze rationale Function von p_2, p_3, ..., p_k und deren Ableitungen ist, welche die Form hat:

$$a_k = p_k + R(p_2, p_3, \ldots, p_{k-1}; p_2', p_3', \ldots, p_{k-1}'; \ldots)$$

und welche in bezug auf das Gewicht ihrer Terme homogen ist; (entsprechend ist in der transformirten Differentialgleichung

$$\alpha_k = q_k + R(q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}; q_2', q_3', \ldots, q_{k-1}'; \ldots)$$

zu setzen). Und zwar sind in diesem Falle, wie man sich leicht überzeugt, die Coefficienten q_2 und q_{k_r} $(r = 1, 2, \ldots, i)$ stets gleich Null, q_{l_s} $(s = 1, 2, \ldots, n-2-i)$ dagegen im Allgemeinen von Null verschiedene Constanten. In die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung gehen die Constanten c_s $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$ als Parameter ein, deren Werthe durch die vorgelegte ursprüngliche Differentialgleichung bestimmt sind; ihre Anzahl ist um Eins kleiner als die der von Null verschiedenen Invarianten a_{l_s}. Ueber die willkürlich gebliebene Constante α_{l_1} verfügt man am besten so, dass die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung möglichst einfach werden (vgl. p. 28 u. f.)

Auch im Falle b) transformire man die Differentialgleichung (y, x, p) durch die Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$y = \varrho . v,$$

wo z durch die Gleichung

$$a_{l_1} = \alpha_{l_1} . \psi'(x)^{l_1}$$

bestimmt wird, in welcher wieder α_{l_1} eine von Null verschiedene, sonst willkürliche Constante bedeutet. Da in diesem Falle nicht nur die Invarianten d_s $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$, sondern auch die Invarianten f_{l_h} $(h = 1,$

$2, \ldots, n-2-i$) verschwinden, so sind hier ausser den Grössen

$$\frac{a_{l_s}^{l_1}}{a_{l_1}^{l_s}} = c_s \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$$

auch die Grössen

$$\frac{b_{l_h}^{l_1}}{a_{l_1}^2} = e_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-2-i)$$

von Null verschiedene Constanten. Daraus folgt, dass in der transformirten Differentialgleichung auch die Invarianten

$$\alpha_{l_s} = \alpha_{l_1}^{\frac{l_s}{l_1}} . c_s^{\frac{1}{l_1}} \qquad (s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$$

und

$$\beta_{l_h} = \alpha_{l_1}^{\frac{2}{l_1}} . e_h^{\frac{1}{l_1}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-2-i)$$

einen constanten Werth besitzen.

Es ergiebt sich nun zunächst aus der Formation von β_{l_h}*), dass

$$q_2 = \frac{n+1}{12 l_h^2} \beta_{l_h},$$

also eine von Null verschiedene Constante ist; ferner folgt aus der ersten der Gleichungen (1.) des § I, dass $q_3 = \alpha_3$ oder $= 0$, je nachdem $l_1 =$ oder > 3 ist; dann aus der zweiten dieser Gleichungen, dass auch q_4 eine (im Allgemeinen von Null verschiedene) Constante ist, etc. Man kommt also auch in diesem Falle durch den Schluss der vollständigen Induction zu dem Resultat, dass in der transformirten Differentialgleichung sämmtliche Coefficienten constant sind; und zwar sind hier $q_4, \ldots, q_n$ im Allgemeinen von Null verschieden, q_2 *jedenfalls* $\neq 0$ und $q_3 \neq 0$ oder $= 0$, je nachdem

$$a_3 = p_3 - \tfrac{3}{2} p_2' \neq 0 \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist. In die Coefficienten der transformirten Differentialgleichung gehen hier ausser den Grössen c_s $(s = 2, 3, \ldots, n-2-i)$ noch die Grössen e_h $(h = 1, 2, \ldots, n-2-i)$ als constante Parameter ein, deren Werthe auch bereits durch die vorgelegte Differentialgleichung bestimmt sind, welche sich aber alle durch einen derselben numerisch rational ausdrücken lassen (vgl. p. 15 Anm. 1); ihre Anzahl ist also $n-2-i$, d. h. *gleich* der Anzahl der *nicht* verschwindenden Invarianten a_{l_s}.

*) Vgl. § I, p. 9.

Durch diese Ausführungen ist der zu Anfang des § III angekündigte Nachweis vollständig erbracht, und wir wenden uns nunmehr zu dem Studium der homogenen Relationen, welche in diesen Ausnahmefällen zwischen den Integralen der in Rede stehenden Differentialgleichung existiren können; dies ist schon deshalb wichtig, weil sich in vielen Fällen (z. B., wenn sich die Existenz von $n-2$ homogenen Relationen ergiebt, mit Hülfe der in § II entwickelten Principien) umgekehrt aus der Existenz dieser Relationen das Verschwinden gewisser Invarianten folgern lässt. — Da in den Ausnahmefällen die transformirte Differentialgleichung stets constante Coefficienten besitzt, so läuft die folgende Untersuchung darauf hinaus, diejenigen Relationen aufzustellen, welche zwischen Grössen von der Form $e^{r_i z}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bestehen können, wo die r_i Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades, nämlich der charakteristischen Gleichung, bedeuten. Wir erledigen zuerst ganz allgemein den Fall *gleicher* Wurzeln:

Es sei

$$\begin{aligned} &r_1 \text{ eine } \lambda_1\text{-fache Wurzel,}\\ &r_2 \text{ eine } \lambda_2\text{-fache Wurzel,}\\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &r_\varrho \text{ eine } \lambda_\varrho\text{-fache Wurzel} \end{aligned}$$

$$(\lambda_i > 1 \ (i = 1, 2, \ldots, \varrho), \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\varrho = k)$$

der charakteristischen Gleichung, so hat bekanntlich die Differentialgleichung folgende Integrale:

$$(3.)\qquad \begin{cases} y_1 = e^{r_1 z}, \quad y_2 = z e^{r_1 z}, \quad \ldots, \quad y_{\lambda_1} = z^{\lambda_1-1} e^{r_1 z},\\ y_{\lambda_1+1} = e^{r_2 z}, \quad y_{\lambda_1+2} = z e^{r_2 z}, \quad \ldots, \quad y_{\lambda_1+\lambda_2} = z^{\lambda_2-1} e^{r_2 z},\\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ y_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{\varrho-1}+1} = e^{r_\varrho z}, \quad \ldots, \quad y_k = z^{\lambda_\varrho-1} e^{r_\varrho z}. \end{cases}$$

Aus

$$(4.)\qquad \begin{cases} z = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{y_3}{y_2} = \cdots\cdots\cdots = \dfrac{y_{\lambda_1}}{y_{\lambda_1-1}}\\ = \dfrac{y_{\lambda_1+2}}{y_{\lambda_1+1}} = \cdots\cdots\cdots\cdots = \dfrac{y_{\lambda_1+\lambda_2}}{y_{\lambda_1+\lambda_2-1}}\\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ = \dfrac{y_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\varrho-1}+2}}{y_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\varrho-1}+1}} = \cdots = \dfrac{y_k}{y_{k-1}} \end{cases}$$

ergeben sich zunächst jedenfalls

$$\lambda_1-2+\lambda_2-2+\cdots+\lambda_\varrho-2+\varrho-1 = k-2\varrho+\varrho-1 = k-\varrho-1$$

quadratische Relationen von der Form:

$$y_i^2 - y_{i-1}y_{i+1} = 0 \quad \text{(Anzahl } k-2\varrho\text{)}$$

bzw.

$$y_{i+1}y_h - y_i y_{h+1} = 0 \quad \text{(Anzahl } \varrho-1\text{)}.$$

Es möge nun ausserdem zwischen den n Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die homogene Relation bestehen:

$$\text{(5.)} \qquad \Sigma C_i y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_k^{i_k} y_{k+1}^{i_{k+1}} \ldots y_n^{i_n} = 0^{*}) \qquad (i_1+i_2+\cdots+i_n = m).$$

Setzt man für $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ihre Werthe ein, so erhält man Glieder von der Form $C_i z^{s_i} e^{a_i z}$; eine Summe von solchen Gliedern kann aber bekanntlich nur dann verschwinden, wenn die algebraischen Summen der zu *demselben* $z^s e^{az}$ gehörigen Coefficienten C_i einzeln verschwinden. Die obige Relation zerfällt demgemäss in mehrere Einzelrelationen, und eine solche wollen wir unserer weiteren Betrachtung zu Grunde legen, nehmen aber der Einfachheit der Darstellung wegen an, die Relation (5.) sei bereits derartig reducirt. Die linke Seite derselben nimmt also durch Einsetzen der Werthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Form an

$$z^s . e^{az} . \Sigma C_i,$$

und es muss $\Sigma C_i = 0$ sein.

Aus dieser Form folgt aber unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.):

$$\text{(6.)} \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + \cdots + (\lambda_1 - 1)i_{\lambda_1} + i_{\lambda_1+2} + 2i_{\lambda_1+3} + \cdots + (\lambda_2 - 1)i_{\lambda_1+\lambda_2} + \cdots \\ \qquad \cdots + i_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\varrho-1}+2} + 2i_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\varrho-1}+3} + \cdots + (\lambda_\varrho - 1)i_k = s. \end{cases}$$

Dividirt man die Relation (5.) durch y_1^m, so lautet dieselbe:

$$\text{(5*.)} \qquad \Sigma C_i \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{i_2} \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{i_n} = 0.$$

Ein Glied derselben ist, von dem constanten Coefficienten abgesehen:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{i_2} \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^{i_3} \cdots \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^{i_k} \left(\frac{y_{k+1}}{y_1}\right)^{i_{k+1}} \cdots \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{i_n}.$$

Nun ist aber**)

$$\frac{y_{\lambda_\mu+\nu}}{y_1} = \frac{y_{\lambda_\mu+\nu}}{y_{\lambda_\mu+\nu-1}} \frac{y_{\lambda_\mu+\nu-1}}{y_{\lambda_\mu+\nu-2}} \cdots \frac{y_{\lambda_\mu+2}}{y_{\lambda_\mu+1}} \frac{y_{\lambda_\mu+1}}{y_1},$$

---

*) Es ist zu beachten, dass die Integrale $y_{k+1}, \ldots, y_n$ zu *einfachen* Wurzeln der charakteristischen Gleichung gehören.

**) Wenn zur Abkürzung λ_μ für $\sum_{h=1}^{h=\mu} \lambda_h$ gesetzt wird.

also infolge der Gleichungen (4.):

$$\frac{y_{\lambda_\mu+\nu}}{y_1} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{y_{\lambda_\mu+1}}{y_1} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots, \varrho-1\\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, \lambda_{\mu+1}\\ \lambda_0 = 1\end{pmatrix}.$$

Das Glied lautet also:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{i_2+2i_3+\cdots+(\lambda_1-1)i_{\lambda_1}+i_{\lambda_1+2}+2i_{\lambda_1+3}+\cdots+(\lambda_\varrho-1)i_k} \cdot \left(\frac{y_{\lambda_1+1}}{y_1}\right)^{i_{\lambda_1+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2}}$$
$$\cdot \left(\frac{y_{\lambda_1+\lambda_2+1}}{y_1}\right)^{i_{\lambda_1+\lambda_2+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}} \cdots \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{i_n}$$

oder infolge von (6.):

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{s} \cdot \left(\frac{y_{\lambda_1+1}}{y_1}\right)^{i_{\lambda_1+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2}} \cdot \left(\frac{y_{\lambda_1+\lambda_2+1}}{y_1}\right)^{i_{\lambda_1+\lambda_2+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}} \cdots \left(\frac{y_n}{y_1}\right)^{i_n}.$$

Da s eine feste Zahl ist, so tritt $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^s$ aus der ganzen linken Seite der Relation (5*.) heraus, und dieselbe nimmt, wenn man zuerst durch $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^s$ dividirt und dann mit y_1^m heraufmultiplicirt, die Gestalt an:

$$\Sigma C_i y_1^{i_1+i_2+\cdots+i_{\lambda_1}} \cdot y_{\lambda_1+1}^{i_{\lambda_1+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2}} \cdot y_{\lambda_1+\lambda_2+1}^{i_{\lambda_1+\lambda_2+1}+\cdots+i_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}} \cdots y_n^{i_n} = 0;$$

die Relation enthält also nur die Grössen

(Y.) $\quad y_1,\ y_{\lambda_1+1},\ y_{\lambda_1+\lambda_2+1},\ \ldots,\ y_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{\varrho+1}+1},\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_n.$

Dieses Resultat gestattet, einen Schluss auf die Maximalzahl der Relationen in dem Falle gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu ziehen. Die Anzahl der Grössen (Y.) ist nämlich $\varrho+n-k$; zwischen denselben können im günstigsten Falle $\varrho+n-k-2$ homogene Relationen bestehen; dazu kommen die $k-\varrho-1$ quadratischen Relationen; das sind im ganzen höchstens

$$\varrho+n-k-2+k-\varrho-1 = n-3$$

Relationen. Im Falle gleicher Wurzeln geht also *stets eine* Relation verloren (eine Ausnahme macht nur der bereits behandelte Fall, wo *alle* Wurzeln gleich sind und $n-2$ parabolische Relationen existiren, cfr. p. 15, Gl. (2.)), und die zugehörige vorgelegte Differentialgleichung (y, x, p) kann in diesen Fällen *keine* algebraischen Integrale besitzen, da zwischen diesen $n-2$ homogene Relationen bestehen müssten. Um es noch einmal zusammenzufassen: „Wenn die charakteristische Gleichung ϱ mehrfache Wurzeln besitzt und die Summe der Ordnungen ihrer Vielfachheit k ist, so bestehen zwischen den Integralen der zugehörigen Differentialgleichung jedenfalls

$k-\varrho-1$ quadratische Relationen, und es können im ganzen nicht mehr als $n-3$ homogene Relationen existiren; nur, wenn $\varrho = 1$ und $k = n$, d. h. wenn nur eine n-fache Wurzel vorhanden ist, bestehen gerade $n-2$ parabolische Relationen."

Nachdem wir so den Fall mehrfacher Wurzeln erledigt und insbesondere gezeigt haben, dass in die nichtquadratischen Relationen aus jeder zu einer mehrfachen Wurzel gehörigen Integralgruppe nur die *ersten* Integrale derselben eintreten können, gehen wir dazu über, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer *bestimmten* Anzahl homogener Relationen zwischen den Integralen der Differentialgleichung aufzustellen. Diese Bedingungen treten in der Form *linearer* homogener Relationen mit ganzzahligen Coefficienten zwischen den ungleichen Wurzeln der charakteristischen Gleichung auf, und es ergiebt sich gleichzeitig, dass alle etwa existirenden homogenen Relationen zwischen den zugehörigen Integralen sich auf *zweigliedrige* zurückführen lassen. Wir nehmen der Einfachheit der Darstellung wegen an, dass alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind; der allgemeine Fall lässt sich infolge der vorhergehenden Betrachtungen ganz in derselben Weise behandeln, wenn man an Stelle *aller* nur die von einander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung und die Grössen (Y.) an Stelle von y_1, y_2, ..., y_n setzt. — Wir beweisen nun zunächst, dass, wenn die Verhältnisse der Wurzeln r_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ rational sind, wenn also zwischen denselben ausser der Gleichung $\sum_{i=1}^{i=n} r_i = 0$*) noch $n-2$ lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten bestehen, wirklich $n-2$ homogene Relationen zwischen den zugehörigen Integralen existiren: Man kann in diesem Falle

$$r_i = \gamma . \varrho_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

setzen, wo die ϱ_i ganze Zahlen ohne einen *allen* gemeinsamen Theiler bedeuten; führt man

$$\zeta = e^{\gamma z}$$

---

*) Diese Relation ist eine Folge davon, dass in der charakteristischen Gleichung das Glied mit der $(n-1)$-ten Potenz der Unbekannten fehlt; im allgemeinen Falle ist an die Stelle derselben die Gleichung $\sum_{s=1}^{\varrho+n-k} \lambda_s r_s = 0$ zu setzen, worin λ_s den Grad der Vielfachheit der Wurzel r_s bedeutet.

ein, so wird

$$y_i = e^{r_i z} = \zeta^{\varrho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

es lassen sich also die Integrale y_i als *rationale* Functionen *eines* Parameters ζ darstellen. Ordnet man die r_i der Grösse nach:

$$r_1 > r_2 > r_3 > \cdots > r_n,$$

also auch

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \cdots > \varrho_n,$$

und setzt

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_k} = \frac{r_1 - r_2}{r_2 - r_k} = \frac{\mu_k}{\nu_k},$$

so ergeben sich in der That die $n-2$ irreductiblen homogenen Relationen:

$$y_2^{\mu_k + \nu_k} = y_1^{\nu_k} \cdot y_k^{\mu_k} \qquad (k = 3, 4, \ldots, n).$$

Aber die Rationalität der Verhältnisse der r_i ist nicht nur die hinreichende, sondern auch die nothwendige Bedingung für die Existenz von $n-2$ homogenen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen; d. h. wenn $n-2$ homogene Relationen bestehen, so sind die Verhältnisse der r_i rational: Es möge also zwischen den Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das irreductible System $n-2$ homogener nicht linearer Relationen bestehen:

$$(7.) \qquad \sum_{s=1}^{l_k} c_s^{(k)} y_1^{p_{1_s}^{(k)}} y_2^{p_{2_s}^{(k)}} \ldots y_n^{p_{n_s}^{(k)}} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-2).$$

Setzt man für y_i seinen Werth $e^{r_i z}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ein, so folgt aus Betrachtungen, die denen auf p. 20 ganz analog sind, dass

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_{i_s}^{(k)} r_i \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \ldots, l_k$$

denselben (nur mit k sich ändernden) Werth haben muss, während gleichzeitig

$$\sum_{s=1}^{l_k} c_s^{(k)} = 0$$

ist; und zwar gilt dies für $k = 1, 2, 3, \ldots, n-2$. Daraus ergiebt sich, wenn

$$p_{i_s}^{(k)} - p_{i_1}^{(k)} = d_{i_s}^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ s = 2, 3, \ldots, l_k \end{pmatrix}$$

gesetzt wird, das lineare homogene Gleichungssystem:

$$(8.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} d_{i_s}^{(k)} r_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots, l_k \\ k = 1, 2, \ldots, n-2 \end{pmatrix}.$$

Dazu tritt wegen der Homogeneität der Relationen (7.) das Gleichungssystem

$$(9.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} d_{i_s}^{(k)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} s = 2, 3, \ldots, l_k \\ k = 1, 2, \ldots, n-2 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem besteht endlich noch die schon erwähnte Relation

$$(10.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} r_i = 0.$$

Die Gleichungen (8.) sind wegen der Gleichungen (9.) von (10.) unabhängig. Ferner müssen von den Gleichungen (8.) gerade $n-2$ unabhängig sein: Es dürfen zunächst nicht ***mehr*** als $n-2$ unabhängig sein, da man sonst zusammen mit Gleichung (10.) mehr als $n-1$ lineare Gleichungen für die $n-1$ Verhältnisse der r_i besässe. Es dürfen aber auch nicht ***weniger*** als $n-2$ Gleichungen unabhängig sein: denn es mögen z. B. nur $n-2-q$ Gleichungen unabhängig sein, so müssten, wenn die unabhängigen Gleichungen mit

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_{i\lambda} r_i = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n-2-q)$$

bezeichnet werden, die Relationen bestehen

$$d_{i_s}^{(k)} = \sum_{\lambda=1}^{n-2-q} \alpha_{s\lambda}^{(k)} d_{i_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ s = 2, 3, \ldots, l_k \\ k = 1, 2, \ldots, n-2 \end{pmatrix}.$$

Dividirt man daher die Gleichungen (7.) beziehentlich durch

$$y_1^{p_{1_1}^{(k)}} y_2^{p_{2_1}^{(k)}} \ldots y_n^{p_{n_1}^{(k)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2$$

und bezeichnet

$$y_1^{d_{1\lambda}} y_2^{d_{2\lambda}} \ldots y_n^{d_{n\lambda}}$$

mit u_λ, so lauten dieselben:

$$(7^*.) \qquad \sum_{s=1}^{s=l_k} c_s^{(k)} u_1^{a_{s_1}^{(k)}} u_2^{a_{s_2}^{(k)}} \ldots u_{n-2-q}^{a_{s_{n-2-q}}^{(k)}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Diese Gleichungen müssten sich also auf $n-2-q$ reduciren, und zwar, wie leicht ersichtlich, auf die Gleichungen

$$u_1 - 1 = 0, \quad u_2 - 1 = 0, \quad \ldots, \quad u_{n-2-q} - 1 = 0,$$

was der Voraussetzung widerspricht. Es müssen daher gerade $n-2$ der Gleichungen (8.) unabhängig sein; aus diesen folgt aber in Verbindung mit der Gleichung (10.) die Rationalität der Verhältnisse der r_i. — Zugleich ergiebt sich, dass die Relationen (7.) sich auf zweigliedrige reduciren lassen.

Wir werden nunmehr allgemein beweisen, „dass, wenn zwischen den r_i ausser der Gleichung (10.) noch $n-2-q$ $(q=1, 2, ,.., n-2)$ lineare homogene Relationen mit rationalen Coefficienten bestehen, die zugehörigen Integrale genau durch $n-2-q$ zweigliedrige homogene Relationen höheren als ersten Grades mit einander verbunden sind, und dass auch umgekehrt aus der Existenz von $n-2-q$ homogenen Relationen zwischen den Integralen das Bestehen von $n-2-q$ linearen homogenen Gleichungen (ausser der Gleichung (10.)) zwischen den r_i folgt." Wenn zwischen den n Grössen r_i ausser der Gleichung (10.) noch $n-2-q$ lineare homogene Relationen mit rationalen Coefficienten bestehen, also $n-1-q$ lineare Gleichungen zwischen den $n-1$ Verhältnissen der r_i, so lassen sich $n-1-q$ derselben in folgender Weise durch die q übrigen ausdrücken:

$$\lambda_i \frac{r_i}{r_{q+1}} = \lambda_1^{(i)} \frac{r_1}{r_{q+1}} + \lambda_2^{(i)} \frac{r_2}{r_{q+1}} + \cdots + \lambda_q^{(i)} \frac{r_q}{r_{q+1}} + \lambda_{q+1}^{(i)}, \qquad (i = q+2, q+3, \ldots, n)$$

wo die λ ganze Zahlen bedeuten. Durch Multiplication mit r_{q+1} erhält man:

$$\lambda_i r_i = \lambda_1^{(i)} r_1 + \lambda_2^{(i)} r_2 + \cdots + \lambda_q^{(i)} r_q + \lambda_{q+1}^{(i)} r_{q+1} \qquad (i = q+2, q+3, \ldots, n).$$

Daraus ergeben sich zwischen den $y_i = e^{r_i z}$ zunächst die $n-q-1$ ***nicht homogenen*** Relationen:

$$y_1^{\lambda_i} = y_1^{\lambda_1^{(i)}} y_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots y_{q+1}^{\lambda_{q+1}^{(i)}} \qquad (i = q+2, \ldots, n)$$

Dieselben lauten, wenn man auf beiden Seiten bzw. durch $y_{q+1}^{\lambda_i}$ dividirt und $\frac{y_k}{y_{q+1}} = \eta_k$ sowie $\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)} + \cdots + \lambda_{q+1}^{(i)} - \lambda_i = k_i$ setzt:

$$\eta_i^{\lambda_i} = \eta_1^{\lambda_1^{(i)}} \eta_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots \eta_q^{\lambda_q^{(i)}} y_{q+1}^{k_i} \qquad (i = q+2, \ldots, n).$$

Wir schreiben diese Gleichungen für $i = q+2$ und $i = q+\nu$ auf:

$$(11.) \qquad \eta_{q+2}^{\lambda_{q+2}} = \eta_1^{\lambda_1^{(q+2)}} \eta_2^{\lambda_2^{(q+2)}} \ldots \eta_q^{\lambda_q^{(q+2)}} y_{q+1}^{k_{q+2}},$$

$$(12.) \qquad \eta_{q+\nu}^{\lambda_{q+\nu}} = \eta_1^{\lambda_1^{(q+\nu)}} \eta_2^{\lambda_2^{(q+\nu)}} \ldots \eta_q^{\lambda_q^{(q+\nu)}} y_{q+1}^{k_{q+\nu}} \qquad (\nu = 3, \ldots, n-q);$$

nennen wir dann m_ν das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von k_{q+2} und $k_{q+\nu}$ und setzen

$$\frac{m_\nu}{k_{q+2}} = \alpha_\nu, \quad \frac{m_\nu}{k_{q+\nu}} = \beta_\nu,$$

erheben ferner beide Seiten der Gleichung (11.) zur α_ν-ten, der Gleichung (12.) zur β_ν-ten Potenz und dividiren endlich die so veränderten Gleichungen (11.)

und (12.) durch einander, so erhalten wir:

$$\eta_{q+2}^{\lambda_{q+2}\alpha_\nu} = \eta_{q+\nu}^{\lambda_{q+\nu}\beta_\nu}\eta_1^{\lambda_1^{(q+2)}\alpha_\nu-\lambda_1^{(q+\nu)}\beta_\nu}\ldots\eta_q^{\lambda_q^{(q+2)}\alpha_\nu-\lambda_q^{(q+\nu)}\beta_\nu}.$$

Wird zur Abkürzung

$$\lambda_i^{(q+2)}\alpha_\nu-\lambda_i^{(q+\nu)}\beta_\nu = \varepsilon_{i_\nu}, \quad \lambda_{q+2}\alpha_\nu-\lambda_{q+\nu}\beta_\nu = \varepsilon_\nu$$

gesetzt, so ergiebt sich hieraus durch beiderseitige Multiplication mit

$$y_{q+1}^{\sum_{i=1}^{i=q}\varepsilon_{i_\nu}+\lambda_{q+\nu}\beta_\nu}$$

zwischen den y_i das System homogener Relationen:

$$(13.)\qquad y_{q+1}^{\sum_{i=1}^{i=q}\varepsilon_{i_\nu}-\varepsilon_\nu}\cdot y_{q+2}^{\lambda_{q+2}\alpha_\nu} = y_{q+\nu}^{\lambda_{q+\nu}\beta_\nu}y_1^{\varepsilon_{1\nu}}y_2^{\varepsilon_{2\nu}}\ldots y_q^{\varepsilon_{q\nu}} \qquad (\nu=3,\,4,\,\ldots,\,n-q).$$

Die Anzahl derselben ist in der That $n-q-2$. Damit ist freilich zunächst nur bewiesen, dass in diesem Falle *mindestens* $n-q-2$ homogene Relationen zwischen den Integralen bestehen müssen. Wir zeigen nun ferner, dass umgekehrt aus dem Bestehen von $n-q-2$ homogenen Relationen zwischen den Integralen die Existenz von $n-q-2$ linearen homogenen Gleichungen (ausser der Gleichung (10.)) zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung folgt: Es möge also zwischen den Integralen y_i das irreductible System $n-q-2$ homogener nicht linearer Relationen bestehen:

$$(14.)\qquad \sum_{s=1}^{s=l_k} c_s^{(k)}y_1^{p_{1s}^{(k)}}y_2^{p_{2s}^{(k)}}\ldots y_n^{p_{ns}^{(k)}} = 0 \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n-q-2),$$

so ergiebt sich durch dieselbe Schlussweise wie auf p. 23 u. flg., wenn auch die dort angewendeten Bezeichnungen beibehalten werden, zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung zunächst das lineare homogene Gleichungssystem

$$(15.)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} d_{i_s}^{(k)}r_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} s=2,\,3,\,\ldots,\,l_k \\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n-q-2 \end{pmatrix}.$$

Dazu tritt noch Gleichung (10.) sowie das Gleichungssystem zwischen den Grössen $d_{i_s}^{(k)}$

$$(16.)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} d_{i_s}^{(k)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} s=2,\,3,\,\ldots,\,l_k \\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n-q-2 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen (15.) sind wieder wegen (16.) von (10.) unabhängig. Ferner müssen von den Gleichungen (15.) *genau* $n-q-2$ unabhängig sein; es dürfen nicht *mehr* als $n-q-2$ Gleichungen unabhängig sein, da sich sonst nach dem zuletzt bewiesenen Satze zwischen den Integralen mehr als

$n-q-2$ homogene Relationen ergeben würden, was der Voraussetzung widerspricht. Es dürfen aber auch nicht *weniger* als $n-q-2$ Gleichungen unabhängig sein; denn es mögen z. B. nur $n-q-2-\lambda$ Gleichungen unabhängig sein, so folgt durch dieselbe Schlussweise wie auf p. 24 u. flg., dass sich das System (14.) auf $n-q-2-\lambda$ zweigliedrige Relationen reduciren würde, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Es müssen also in diesem Falle ausser der Gleichung (10.) genau $n-q-2$ homogene lineare Gleichungen zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung existiren. Die Relationen (14.) lassen sich übrigens, wie man leicht sieht, wieder auf zweigliedrige reduciren. — Jetzt sind wir im Stande, auch den letzten Theil des aufgestellten Satzes zu beweisen: dass nämlich aus der Existenz von $n-q-2$ homogenen linearen Gleichungen (ausser der Gleichung (10.)) zwischen den Grössen r_i das Bestehen von *genau* $n-q-2$ homogenen Relationen zwischen den Integralen folgt. Dass in diesem Falle *mindestens* $n-q-2$ homogene Relationen bestehen, haben wir bereits gezeigt; es dürfen aber auch nicht *mehr* als $n-q-2$ Relationen existiren, weil sich sonst nach dem soeben bewiesenen Satze zwischen den Grössen r_i mehr als $n-q-2$ homogene lineare Gleichungen (ausser Gleichung (10.)) ergeben würden, was der Voraussetzung widerspricht.

Als bemerkenswerthe Beispiele führen wir die folgenden an:

1) Die transformirte Differentialgleichung habe die Gestalt:

$$\frac{d^n v}{dz^n} - v = 0. \tag{17.}$$

Dieser Fall tritt ein, wenn in der ursprünglichen Differentialgleichung die Invarianten $a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$ sowie b_n verschwinden und die willkürliche Constante α_{l_1} (vgl. p. 18) passend gewählt worden ist. Ferner sei $n = p$, wo p eine Primzahl bedeutet. Die charakteristische Gleichung lautet in diesem Falle:

$$r^p - 1 = 0.$$

Zwischen ihren Wurzeln kann wegen der Irreductibilität der Gleichung

$$\frac{r^p-1}{r-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{p-1} = 0$$

ausser der Gleichung (10.) keine homogene lineare Relation bestehen; es existirt daher zwischen den Fundamentalintegralen der Differentialgleichung (17.) *keine* homogene Relation.

2) Die transformirte Differentialgleichung habe die Gestalt:

$$\frac{d^n v}{dz^n} - \frac{dv}{dz} = 0. \tag{18.}$$

Dieser Fall tritt ein, wenn in der ursprünglichen Differentialgleichung die Invarianten a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_n sowie b_{n-1} verschwinden und über die willkürliche Constante α_{l_1} (vgl. p. 18) passend verfügt worden ist. Ferner sei $n = p+1$, wo p wieder eine Primzahl bedeutet. Die charakteristische Gleichung lautet in diesem Falle:

$$r^{p+1} - r = 0;$$

sie besitzt die Wurzel $r_1 = 0$ sowie sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$r^p - 1 = 0.$$

Zwischen ihren Wurzeln kann daher wegen der Irreductibilität der Gleichung

$$\frac{r^p - 1}{r - 1} = 0$$

ausser der Gleichung (10.) nur noch die lineare homogene Relation $r_1 = 0$ bestehen; es existirt daher zwischen den Fundamentalintegralen der Differentialgleichung (18.) nur die *eine* irreductible homogene Relation

$$y_1^p - y_2 y_3 y_4 \cdots y_{p+1} = 0.$$

§ IV.

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, welchen Functionscharakter in den im § III behandelten Ausnahmefällen die Integrale der Differentialgleichung (A.) $(u, x, \mathfrak{p})$ besitzen, machen aber zu diesem Zwecke *hier* von vornherein die Voraussetzung, dass diese Differentialgleichung zur *Fuchs*schen Klasse gehört*) und die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Zahlen sind. Dagegen lassen wir die Voraussetzung der Existenz homogener Relationen fallen, weil dieselben, wie aus § III hervorgeht, durch das Verschwinden der verschiedenen Invarianten sowie durch die Werthe der Constanten c_s und e_h (p. 18) bereits ihrer Anzahl und Form nach bestimmt sind. Da in diesem Falle der Voraussetzung gemäss der Transformationsfactor

$$u = e^{-\frac{1}{n}\int v_1 dx}$$

*) *Ludw. Schlesinger*, Dissertation, p. 1; *Fuchs*, dieses Journ., Bd. 66, p. 146.

der Substitution $u = \mu y$, durch welche die Differentialgleichung (A.) in die vom Gliede mit der $(n-1)$-ten Ableitung freie Differentialgleichung (I.) übergeht, die rationale Wurzel aus einer rationalen Function ist, so können wir die vorgelegte Differentialgleichung bei unserer Untersuchung sogleich in der Form (I.) voraussetzen, welche denselben Charakter wie (A.) besitzt. Dieselbe lässt sich, wie im § III gezeigt worden ist, in allen Ausnahmefällen durch eine Substitution

$$y = \varrho . v,$$
$$z = \psi(x)$$

auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten zurückführen, in welcher ebenfalls das Glied mit der $(n-1)$-ten Ableitung fehlt. — Wir betrachten nun vorerst diejenigen Differentialgleichungen, für welche die Gewichte der ***nicht*** verschwindenden Invarianten ausser 1 keinen allen gemeinsamen Theiler besitzen; damit ist vorläufig auch der später besonders zu behandelnde Fall ausgeschlossen, wo *alle* Invarianten a_k verschwinden. Die ***nicht*** verschwindenden Invarianten (a_k, b_k, p. 16 u. f.) mögen gemeinsam durch

$$J_1, \quad J_2, \quad J_3, \quad \ldots, \quad J_m,$$

ihre Gewichte durch

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_m$$

bezeichnet werden; die letzteren sind ihrer Bedeutung nach ganze positive Zahlen, von denen mehrere — jedoch nicht alle — einander gleich sein können; so sind z. B. alle Invarianten b_k vom Gewichte 2. — Man kann nun bekanntlich unter der über die g_i gemachten Voraussetzung stets m theils positive, theils negative ganze Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_m$ derart wählen, dass

$$k_1 g_1 + k_2 g_2 + \cdots + k_m g_m = 1$$

wird; die Invariante

$$J = J_1^{k_1} . J_2^{k_2} \ldots J_m^{k_m}$$

ist daher vom Gewichte 1. Wird die entsprechende Invariante der transformirten Differentialgleichung mit constanten Coefficienten durch i bezeichnet, so ist auch i eine Constante, und es besteht nach Früherem die Beziehung

$$J = i . \psi'(x).$$

Da J sich rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung (I.) und

deren Ableitungen zusammensetzt, diese aber der Voraussetzung gemäss rationale Functionen der Veränderlichen x sind, so ist auch J eine rationale Function von x; dasselbe gilt daher von $\psi'(x)$. — Wir können aber noch mehr über $\psi'(x)$ erschliessen: Die transformirte Differentialgleichung lautete

$$\text{(II.)} \qquad \frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} q_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \cdots + n q_{n-1} \frac{dv}{dz} + q_n v = 0,$$

und zwar bedeuten in unserem Falle die Coefficienten q_i Constanten. Es möge ferner diejenige Differentialgleichung, welche aus (II.) durch die Substitution

$$z = \psi(x)$$

hervorgeht, mit

$$\text{(C.)} \qquad \frac{d^n v}{dx^n} + s_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \cdots + s_n v = 0$$

bezeichnet werden; die Coefficienten s_i sind hierin Functionen von x $\left(\text{speciell ist } s_1 = -\frac{n(n-1)}{2} \frac{z''}{z'}\right)$. Die Integrale der Differentialgleichung (C.) unterscheiden sich von denen der Differentialgleichung (I.) nur durch den Factor

$$\varrho^{-1} = e^{\int \frac{n-1}{2} \frac{z''}{z'}} = [\psi'(x)]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Da $\psi'(x)$ eine rationale Function von x ist, so gehört also auch die Differentialgleichung (C.) zur *Fuchs*schen Klasse. Es besteht aber zwischen den Coefficienten q_n und s_n die leicht zu ermittelnde Beziehung

$$s_n = q_n z'^n.$$

Daraus ergiebt sich:

$$z' = \sqrt[n]{\frac{s_n}{q_n}};$$

q_n ist eine Constante, die i. a. von Null verschieden vorausgesetzt werden darf, s_n eine rationale Function der Variablen x von der Form*)

$$\frac{P_{n(\varrho-1)}}{Q_\varrho^n}.$$

Da andererseits z' bereits selber als rationale Function von x erschlossen

*) *Fuchs*, l. c.; die Indices geben den Grad der ganzen Functionen P und Q an; Q enthält nur ***einfache*** Factoren.

worden ist, so hat es folgende Gestalt:

$$z' = \frac{P_{\varrho-1}}{Q_\varrho} = \sum_{k=1}^{k=\varrho} \frac{\alpha_k}{x-x_k}.$$

Es ist daher $z = \psi(x)$ der Logarithmus eines Ausdruckes:

$$X = \prod_{k=1}^{k=\varrho} (x-x_k)^{\alpha_k},$$

und die Integrale der Differentialgleichung (I.) lauten:

$$y_i = \left(\frac{d\log X}{dx}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \cdot X^{r_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

wenn r_i die Wurzeln der zu der transformirten Differentialgleichung gehörigen charakteristischen Gleichung bedeuten. Da $\left(\frac{d\log X}{dx}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$ die Wurzel einer rationalen Function ist, so muss nach den über die Differentialgleichung (I.) gemachten Voraussetzungen*) auch X^{r_i} Wurzel aus einer rationalen Function sein**). Daraus folgt noch, dass die Verhältnisse der r_i rational sein müssen, was übrigens auch daraus hervorgeht, dass hier zwischen den Integralen der Differentialgleichung (I.), die, wie wir eben gezeigt, algebraisch sind, $n-2$ homogene Relationen existiren. Das erhaltene Resultat können wir in den Satz zusammenfassen: „Wenn in den im § III behandelten Ausnahmefällen die Gewichte der nicht verschwindenden Invarianten

*) Lässt man die Voraussetzung, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sein sollen, fallen, so ergeben sich, wie man leicht sieht, als Integrale der Differentialgleichung (I.) *endliche* Producte theils rationaler, theils irrationaler Potenzen von Linearfactoren der unabhängigen Variablen. — Besitzt die charakteristische Gleichung der transformirten Differentialgleichung *gleiche* Wurzeln, so tritt in den Integralen der Differentialgleichung (I.) $\log X$ auf. Da aber die Wurzeln der zu dem singulären Punkte x_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (I.)

$$\varrho_i = \frac{n-1}{2} + \alpha_k r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, so folgt aus der Gleichheit zweier r_i die Gleichheit zweier ϱ_i. Unter den über die Differentialgleichung (I.) gemachten Voraussetzungen können daher keine Logarithmen auftreten.

**) Dass die Integrale der Differentialgleichung (I.) Wurzeln rationaler Functionen sind, folgt übrigens bereits daraus, dass sie die Form $e^{\int R(x)dx}$ haben, und aus der Voraussetzung, dass sie sich *„regulär“* verhalten sollen und die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen *rationale* Zahlen sind.

keinen allen gemeinsamen Theiler besitzen, so sind die Integrale der Differentialgleichung (I.), falls dieselbe der *Fuchs*schen Klasse angehört und die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Zahlen sind, algebraisch und zwar Wurzeln rationaler Functionen." — Es sei noch einmal hervorgehoben, dass die Existenz von $n-2$ homogenen Relationen zwischen den Integralen hier nicht vorausgesetzt zu werden braucht, sondern eine Folge der übrigen Bedingungen ist.

Besitzen dagegen die Gewichte der nicht verschwindenden Invarianten einen allen gemeinsamen Theiler μ, so kann man nur schliessen, dass $\psi'(x)$ die μte Wurzel aus einer rationalen Function ist:

$$\psi'(x) = \sqrt[\mu]{R(x)}.$$

Die Integrale der Differentialgleichung (I.) lauten in diesem Falle i. a.:

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}} . e^{r_i \int \sqrt[\mu]{R(x)}\, dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

sie brauchen also jedenfalls nicht algebraisch zu sein. Wir wollen zeigen, dass, wenn $\mu > 2$ ist, sie gar nicht algebraisch sein *können:* Ist nämlich $\mu > 2$, so verschwinden zunächst alle Invarianten b_k (p. 9), denn dieselben sind vom Gewichte 2; und die — mit den Indices übereinstimmenden — Gewichte der nicht verschwindenden Invarianten a_l genügen der Bedingung

$$l \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Nun haben wir im § III gezeigt, dass in der transformirten Differentialgleichung nur diejenigen der constanten Coefficienten c_l von Null verschieden sind, welche mit den Invarianten a_l gleichen Index haben (p. 18); ist daher der Grad der Differentialgleichung (I.)

$$n = \varkappa\mu + \lambda \qquad (\lambda < \mu),$$

so lautet die transformirte Differentialgleichung mit constanten Coefficienten:

$$(\text{II}^*.) \qquad \frac{d^n v}{dz^n} + c_\mu \frac{d^{n-\mu} v}{dz^{n-\mu}} + c_{2\mu} \frac{d^{n-2\mu} v}{dz^{n-2\mu}} + \cdots + c_{\varkappa\mu} \frac{d^\lambda v}{dz^\lambda} = 0,$$

und die zugehörige charakteristische Gleichung:

$$r^n + c_\mu r^{n-\mu} + c_{2\mu} r^{n-2\mu} + \cdots + c_{\varkappa\mu} r^\lambda = 0.$$

Dieselbe besitzt zunächst die λ-fache Wurzel $r_1 = 0$; ist $\lambda > 1$, so können, wie wir gezeigt haben (p. 21), zwischen den Integralen höchstens $n-3$

homogene Relationen bestehen, dieselben also nicht alle algebraisch sein*). *Ein* der Wurzel $r_1 = 0$ entsprechendes Integral *ist* algebraisch, es lautet $[R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}}$; dasselbe findet statt, wenn $\lambda = 1$ ist; wir können dann die Gleichung (1.) durch r dividiren und den Fall $\lambda = 1$ zusammen mit dem Fall $\lambda = 0$ behandeln**). Die charakteristische Gleichung lautet hier:

$$(1^*.) \qquad r^{\varkappa\mu} + c_\mu r^{(\varkappa-1)\mu} + c_{2\mu} r^{(\varkappa-2)\mu} + \cdots + c_{\varkappa\mu} = 0.$$

Setzt man

$$r^\mu = \varrho,$$

so wird dieselbe:

$$\varrho^\varkappa + c_\mu \varrho^{\varkappa-1} + c_{2\mu} \varrho^{\varkappa-2} + \cdots + c_{\varkappa\mu} = 0.$$

Eine Wurzel derselben sei ϱ_1, so lauten μ Wurzeln der Gleichung (1*.)

$$\sqrt[\mu]{\varrho_1}, \quad \varepsilon\sqrt[\mu]{\varrho_1}, \quad \varepsilon^2\sqrt[\mu]{\varrho_1}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{\mu-1}\sqrt[\mu]{\varrho_1},$$

worin ε eine primitive μte Einheitswurzel bedeutet; das Verhältniss zweier auf einander folgenden ist keine rationale Zahl, es *können* daher nach § III nicht $n-2$ homogene Relationen zwischen den Integralen der Differentialgleichung (I.) bestehen, dieselben also *nicht* sämmtlich algebraisch sein. Es ist bemerkenswerth, dass trotzdem die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung (I.) *rationale* Zahlen sein können; dies findet statt, wenn $\int \sqrt[\mu]{R(x)}\,dx$ ein ultraelliptisches Integral***) erster

*) Die Integrale lauten in diesem Falle

$$y_k = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}} \cdot \left[\int \sqrt[\mu]{R(x)}\,dx\right]^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}} \cdot e^{r_i \int \sqrt[\mu]{R(x)}\,dx} \qquad (i = \lambda+1, \lambda+2, \ldots, n).$$

Dass sie nicht sämmtlich algebraisch sind, geht schon daraus hervor, dass nicht gleichzeitig $\int \sqrt[\mu]{R(x)}\,dx$ und $e^{\int \sqrt[\mu]{R(x)}\,dx}$ algebraische Functionen von x sein können. Dasselbe findet statt, wenn die charakteristische Gleichung eine *andere mehrfache* Wurzel besitzt.

**) Es ergiebt sich in diesen Fällen noch, dass i. a.

$$R(x) = \frac{P_{\mu(\varrho-1)}}{Q_\varrho^\mu}$$

ist, worin P und Q ganze rationale Functionen vom Grade des Index bedeuten.

***) Ein ultraelliptisches Integral ist nach der gebräuchlichen Terminologie ein *Abel*sches Integral, dessen Integrand eine höhere als die zweite Wurzel aus einer rationalen Function ist.

Gattung ist, also in der ganzen complexen x-Ebene nicht unendlich wird. In diesem Falle kann man nämlich die Integrale der Differentialgleichung (I.)

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}} . e^{r_i \int \sqrt[\mu]{R(x)}dx}$$

abgesehen von dem Factor $[R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}}$, der ja die Wurzel einer rationalen Function ist, in der Umgebung eines singulären Punktes $x = a$ (für $a = \infty$ ist $\frac{1}{x}$ an Stelle von $x-a$ zu setzen) in folgender Weise entwickeln:

$$e^{r_i \int \sqrt[\mu]{R(x)}dx} = e^{\int (x-a)^{\frac{\alpha}{\mu}} . \mathfrak{B}_i(x-a)dx} = e^{(x-a)^{\frac{\gamma}{\mu}} . \mathfrak{B}_i(x-a)},$$

wenn $\alpha+\mu=\gamma$ gesetzt wird; α ist eine positive oder negative ganze Zahl, doch muss nach Voraussetzung $\alpha > -\mu$ sein, damit γ positiv werde. Ist γ relativ prim zu μ, so hat die Entwickelung die Form:

$$P_0(x-a)+\varepsilon(x-a)^{\frac{\gamma}{\mu}} P_1(x-a)+\cdots+\varepsilon^{\mu-1}(x-a)^{\frac{(\mu-1)\gamma}{\mu}} P_{\mu-1}(x-a)^{*}).$$

Es ist leicht ersichtlich, dass man auch Integrale der Differentialgleichung (I.) erhält, wenn in dieser Entwickelung ε der Reihe nach durch $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^\mu$ ersetzt wird; daraus ergiebt sich, dass die Functionen

$$P_0(x-a), \quad (x-a)^{\frac{\gamma}{\mu}} P_1(x-a), \quad \ldots, \quad (x-a)^{\frac{(\mu-1)\gamma}{\mu}} . P_{\mu-1}(x-a)$$

selber eine Gruppe von μ Gliedern des zu dem singulären Punkte $x = a$ gehörigen Fundamentalsystems von Integralen bilden; dieselben genügen übrigens bereits für sich einer Differentialgleichung μter Ordnung, nämlich derjenigen, welche aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^\mu y}{dz^\mu} - \varrho_i y = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

durch die Transformation

$$z = \psi(x) = \int \sqrt[\mu]{R(x)}\, dx$$

hervorgeht, und es sind im ganzen $\varkappa$ solcher Integralgruppen vorhanden, welche den Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\varkappa$ entsprechen. — Wenn γ und μ einen gemeinsamen Theiler μ' haben:

$$\gamma = \delta . \mu',$$
$$\mu = \nu . \mu',$$

---

*) $\mathfrak{P}(x-a)$ und $P(x-a)$ bedeuten convergente nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ ansteigende Potenzreihen.

so lautet die Entwickelung von $e^{r_i\int\sqrt[\mu]{R(x)}dx}$ in der Umgebung von $x=a$:

$$P_0(x-a)+\varepsilon^\nu(x-a)^\delta P_1(x-a)+\cdots+\varepsilon^{(\mu'-1)\nu}(x-a)^{(\mu'-1)\delta}P_{\mu'-1}(x-a)$$

$$+\varepsilon(x-a)^{\frac{\delta}{\nu}}[P_{\mu'}(x-a)+\varepsilon^\nu(x-a)^\delta P_{\mu'+1}(x-a)+\cdots+\varepsilon^{(\mu'-1)\nu}(x-a)^{(\mu'-1)\delta}P_{2\mu'-1}(x-a)]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\varepsilon^{\nu-1}(x-a)^{\frac{(\nu-1)\delta}{\nu}}[P_{(\nu-1)\mu'}(x-a)+\varepsilon^\nu(x-a)^\delta P_{(\nu-1)\mu'+1}(x-a)+\cdots$$

$$\cdots+\varepsilon^{(\mu'-1)\nu}(x-a)^{(\mu'-1)\delta}P_{\mu-1}(x-a)].$$

Man erhält auch Integrale der Differentialgleichung (I.), wenn ε durch ε^k $(k=2,3,\ldots,\mu)$ ersetzt wird; daraus ergiebt sich wieder, dass

$$P_0(x-a),\quad (x-a)^\delta P_1(x-a),\quad \ldots,\quad (x-a)^{(\mu'-1)\delta}P_{\mu'-1}(x-a),$$

$$(x-a)^{\frac{\delta}{\nu}}P_{\mu'}(x-a),\quad (x-a)^{\frac{\delta}{\nu}+\delta}P_{\mu'+1}(x-a),\quad \ldots,\quad (x-a)^{\frac{\delta}{\nu}+(\mu'-1)\delta}P_{2\mu'-1}(x-a),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x-a)^{\frac{(\nu-1)\delta}{\nu}}P_{(\nu-1)\mu'}(x-a),\quad (x-a)^{\frac{(\nu-1)\delta}{\nu}+\delta}P_{(\nu-1)\mu'+1}(x-a),\quad \ldots,$$

$$(x-a)^{\frac{(\mu-1)\delta}{\nu}}P_{\mu-1}(x-a)$$

eine Gruppe von μ Gliedern des zu dem singulären Punkte $x=a$ gehörigen Fundamentalsystems von Integralen bilden, welche bereits für sich einer Differentialgleichung μter Ordnung genügen; und es sind wieder $\varkappa$ solcher Integralgruppen vorhanden, welche zusammen das Fundamentalsystem von $n=\varkappa\mu$ Integralen der Differentialgleichung (I.) ausmachen (im Falle $n=\varkappa\mu+1$ tritt noch das algebraische Integral $[R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}}$ hinzu). Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass in dem Falle, wo $\int\sqrt[\mu]{R(x)}dx$ ein ultraelliptisches Integral erster Gattung ist, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen ganze Zahlen oder gemeine Brüche, also in der That *rational* sind.

Der soeben behandelte Fall ist übrigens der *einzige*, welcher mit den über die Differentialgleichung (I.) gemachten Voraussetzungen verträglich ist: denn wenn $\int\sqrt[\mu]{R(x)}dx$ an einer singulären Stelle $x=a$ unendlich wird, so darf es, damit sich die Integrale der Differentialgleichung (I.) *regulär* verhalten, nur *logarithmisch* unendlich werden, weil sonst $x=a$ für die Function $e^{r_i\int\sqrt[\mu]{R(x)}dx}$ eine *wesentlich* singuläre Stelle wäre; folglich haben

die Integrale der Differentialgleichung (I.) abgesehen von dem Factor $[R(x)]^{-\frac{n-1}{2\mu}}$ in der Umgebung von $x=a$ die Form

$$e^{r_i\varepsilon^k\alpha\log(x-a)+r_i\varepsilon^k\mathfrak{P}(x-a)} = (x-a)^{r_i\varepsilon^k\alpha}P_{i_k}(x-a) \qquad \binom{i=1,2,\ldots,\varkappa}{k=1,2,\ldots,\mu},$$

worin α das Residuum von $\sqrt[\mu]{R(x)}$ in Bezug auf $x-a$ ist und $\mathfrak{P}(x-a)$ sowie $P_{i_k}(x-a)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Potenzreihen bedeuten. Es müssten also der Voraussetzung gemäss die Grössen $r_i\varepsilon^k\alpha$ für $k=1, 2, 3, \ldots, \mu$ *gleichzeitig* rationale Zahlen sein; das ist aber unmöglich, da ε eine μte Einheitswurzel bedeutet.

Wenn $\mu=2$ ist, so müssen alle Invarianten a_{2l+1} mit ungeradem Index verschwinden*); dagegen können *alle* Invarianten a_{2l} und b_{2l} mit geradem Index von Null verschieden sein. Der Anblick der Invarianten a_k (p. 8 Gl. (1.)) lehrt, dass in diesem Falle in der transformirten Differentialgleichung alle Coefficienten c_{2l+1} mit ungeradem Index ebenfalls verschwinden, da hier auch der lineare Theil des Ausdruckes einer jeden Invariante mit ungeradem Index gleich 0 ist**). Die transformirte Differentialgleichung lautet daher, je nachdem der Grad n der Differentialgleichung (I.) eine gerade Zahl $2m$ oder eine ungerade Zahl $2m+1$ ist:

$$(2.) \qquad \frac{d^{2m}v}{dz^{2m}}+c_2\frac{d^{2m-2}v}{dz^{2m-2}}+\cdots+c_{2m}v = 0$$

beziehentlich:

$$(2^*.) \qquad \frac{d^{2m+1}v}{dz^{2m+1}}+c_2\frac{d^{2m-1}v}{dz^{2m-1}}+\cdots+c_{2m}\frac{dv}{dz} = 0,$$

und die zugehörige charakteristische Gleichung:

$$(3.) \qquad r^{2m}+c_2r^{2m-2}+\cdots+c_{2m} = 0$$

beziehentlich:

$$(3^*.) \qquad r^{2m+1}+c_2r^{2m-1}+\cdots+c_{2m}r = 0.$$

Da im Falle eines ungeraden n das der Wurzel $r=0$ entsprechende Integral der Differentialgleichung (I.)

$$[R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} = [R(x)]^{-\frac{m}{2}},$$

also jedenfalls algebraisch ist, so können wir unsere folgenden Betrach-

*) Die Differentialgleichung (I.) hat in diesem Falle, wie Herr *Brioschi* (l. c. p. 237) zeigt, die bemerkenswerthe Eigenschaft, ihre eigene „*Lagrange*sche Adjungirte“ zu sein.

**) Vgl. *Brioschi*, l. c. p. 237.

tungen auf ein gerades n, d. h. auf die Gleichungen (2.) und (3.) beschränken. Es ist hier:

$$\psi'(x) = \sqrt{R(x)}^{*}),$$

so dass die Integrale der Differentialgleichung (I.) lauten:

$$y_i = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} . e^{r_i \int \sqrt{R(x)}dx}.$$

Dieselben brauchen nicht algebraisch zu sein, da $e^{r_i \int \sqrt{R(x)}dx}$ selbst unter den über die Differentialgleichung (I.) gemachten Voraussetzungen nicht nothwendig algebraisch ist. Aber die Integrale ***können*** hier algebraisch sein; denn setzt man in Gleichung (3.)

$$r^2 = \varrho,$$

so wird dieselbe

$$\varrho^m + c_2 \varrho^{m-1} + \cdots + c_{2m} = 0.$$

Ihre Wurzeln seien

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \ldots, \quad \varrho_m,$$

so sind die Wurzeln der Gleichung (3.):

$$\pm\sqrt{\varrho_1}, \quad \pm\sqrt{\varrho_2}, \quad \ldots, \quad \pm\sqrt{\varrho_m}.$$

Dieselben können sehr wohl *alle* ein rationales Verhältniss zu einander haben (die *einzige rationale* primitive Einheitswurzel ist eben die ***zweite***), so dass nach § III $n-2$ homogene Relationen zwischen den zugehörigen Integralen möglich sind, die letzteren also unter Umständen algebraische Functionen sein können. Es ist aber bemerkenswerth, dass selbst dann, ***wenn*** $n-2$ homogene Relationen zwischen den Integralen existiren, dieselben hier nicht algebraisch zu sein brauchen, wie unten noch gezeigt werden soll. — Die Functionen $e^{r_i \int \sqrt{R(x)}dx}$ **) genügen paarweise — derart, dass

---

*) Es ergiebt sich noch, dass i. a. $R(x)$ die Form hat:

$$R(x) = \frac{P_{2(\varrho-1)}}{Q_\varrho^2},$$

worin P und Q ganze rationale Functionen vom Grade des Index bedeuten.

**) Von dem Factor $[R(x)]^{-\frac{n-1}{4}}$, der die Wurzel einer rationalen Function ist, sehen wir im Folgenden ab; die hier betrachteten Functionen genügen einer Differentialgleichung, welche aus der vorgelegten durch die Transformation $y = [R(x)]^{-\frac{n-1}{4}} . v$ hervorgeht.

$e^{\pm\sqrt{\varrho_i}\int\sqrt{R(x)}dx}$ je ein Paar bildet — einer Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{R(x)}\frac{dv}{dx}-\varrho_i R(x)v = 0\ ^*),$$

welche aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2}-\varrho_i v = 0$$

durch die Substitution

$$z = \int\sqrt{R(x)}dx$$

hervorgeht.

Wir wollen nun zunächst feststellen, wann die Integrale $e^{\int\sqrt{\varrho_i R(x)}dx}$ algebraische Functionen sind; die Entscheidung darüber liefert folgender Satz von *Abel***): „Wenn ein Integral von der Form $\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R(x)}}$, wo ϱ und R ganze Functionen von x sind, durch Logarithmen dargestellt werden kann, so kann man es immer auch folgendermassen ausdrücken:

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R(x)}} = A\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right),$$

wo A constant ist und p und q ganze Functionen von x sind.“ Wenn daher in unseren Integralen

$$\sqrt{\varrho_i R(x)} = \frac{L(x)}{\sqrt{R_1(x)}}$$

ist, wo L und R_1 ganze rationale Functionen von x bedeuten, so müssen dieselben, falls sie algebraisch sind, die Form haben:

$$y_1 = \left(\frac{p+q\sqrt{R_1}}{p-q\sqrt{R_1}}\right)^{\alpha},$$

$$y_2 = \left(\frac{p+q\sqrt{R_1}}{p-q\sqrt{R_1}}\right)^{-\alpha};$$

darin sind p und q *ganze* rationale Functionen von x und α eine rationale Zahl. — Aus dieser Form ergiebt sich zugleich die Entscheidung darüber,

---

*) Vgl. *Meyer,* Dissertation, p. 43.

**) Dieses Journal, Bd. 1, p. 221 oder Oeuvres compl., t. I, p. 350 sqq. Vgl. auch *Fuchs*, „Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen“, dieses Journal, Bd. 81, p. 118.

wann die Integrale algebraisch sind, wie aus derselben Abhandlung von *Abel* hervorgeht*).

Um ferner nachzuweisen, dass in dem Falle $\mu = 2$ die Integrale ***nicht*** algebraisch zu sein brauchen, selbst wenn $n-2$ homogene nichtlineare Relationen zwischen denselben bestehen, nehmen wir in den Functionen $e^{\pm\sqrt{\varrho_i}\int\sqrt{R(x)}dx}$ die Verhältnisse der $\sqrt{\varrho_i}$ als rational**) und $\int\sqrt{R(x)}dx$ als ein elliptisches Integral erster Gattung an***). Die Integrale sind dann sicher ***nicht*** algebraisch, und doch sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nach früheren Erörterungen (vgl. p. 33 u. f.) rational, und es existiren nach § III zwischen den Integralen $n-2$ homogene nichtlineare Relationen: setzen wir

$$\sqrt{\varrho_i} = \gamma.\mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo die μ_i ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler bedeuten, und

$$\left.\begin{matrix} y_{2i-1} \\ y_{2i} \end{matrix}\right\} = e^{\pm\gamma\mu_i\int\sqrt{R(x)}dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

so ergeben sich in der That zwischen den Integralen y_i die $n-2$ homogenen Relationen:

$$\begin{cases} y_1y_2 = y_3y_4 = \cdots = y_{2m-1}y_{2m}, \\ \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\mu_k} = \left(\frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}\right)^{\mu_1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, m). \end{cases}$$

Dies gilt, wenn $n = 2m$ ist; wenn $n = 2m+1$ ist, so tritt noch das Integral $y_0 = 1$, also die Relation

$$y_0^2 = y_1y_2$$

hinzu.

Es bleibt endlich noch der Fall zu erledigen, wo *alle* Invarianten a_k verschwinden, also zwischen den Integralen $n-2$ parabolische Relationen

$$y_k^2 - y_{k-1}y_{k+1} = 0 \dagger) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2)$$

---

*) Das einfachste Beispiel eines algebraischen Integrales ist folgendes:

$$e^{\int\frac{R'(x)}{\sqrt{R(x)^2+C}}} = R(x)+\sqrt{R(x)^2+C'}.$$

) Sobald diese Verhältnisse ***nicht* rational sind, können nach § III nicht $n-2$ homogene Relationen zwischen den Integralen bestehen, die letzteren also ebenfalls nicht algebraisch sein.

***) Vgl. *Meyer*, Dissertation, p. 42 u. f.

†) Vgl. p. 15.

bestehen; da sich hier aus der Bestimmungsgleichung für $z = \psi(x)$

$$p_2 + \frac{n+1}{2.3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 - \frac{z'''}{z'}\right] = 0\ ^*)$$

z nicht nothwendig als algebraische Function von x ergiebt, so brauchen in diesem Falle die Integrale *nicht* algebraisch zu sein.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate können wir folgendermassen zusammenfassen:

„Es giebt zwei Kategorieen von linearen homogenen Differentialgleichungen; die Differentialgleichungen der *ersten* Kategorie sind diejenigen, für welche *nicht* alle Invarianten $d_{k,l}$ und f_r (§ I, p. 10) verschwinden oder ihren Sinn verlieren, die Differentialgleichungen der *zweiten* Kategorie sind diejenigen, für welche dies der Fall ist.

Wenn zwischen den Fundamentalintegralen einer Differentialgleichung der ersten Kategorie mit algebraischen Coefficienten, von denen derjenige des zweiten Gliedes die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist, $n-2$ homogene Relationen bestehen, so sind ihre Integrale *sämmtlich algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen.*

Die Differentialgleichungen der zweiten Kategorie lassen sich alle durch eine Substitution

$$z = \psi(x),$$
$$y = \varrho(x).v$$

auf eine Differentialgleichung mit constanten Coefficienten transformiren, und die Anzahl ihrer homogenen Integralrelationen, welche hier stets zweigliedrig sind, ist durch die mit der vorgelegten Differentialgleichung gegebenen Werthe der Constanten c_s und e_h (p. 18) bereits bestimmt.

Wenn die Differentialgleichungen der zweiten Kategorie gleichzeitig zur *Fuchs*schen Klasse gehören, die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Zahlen sind und die Gewichte der *nicht* verschwindenden Invarianten a_k und b_k des § I

1) keinen *allen* gemeinsamen Theiler besitzen, so *sind* ihre Integrale algebraisch, und zwar Wurzeln aus rationalen Functionen;

2) ist ihr grösster gemeinsamer Theiler 2, so *brauchen* die Integrale nicht algebraisch zu sein, *können* es aber sein;

3) ist ihr grösster gemeinsamer Theiler *grösser* als 2, so *können* die Integrale nicht algebraisch sein.“

---

*) Vgl. p. 14.

Setzt man die vorgelegte Differentialgleichung *sogleich* als zur *Fuchs*schen Klasse gehörig und die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen als rationale, von einander verschiedene Zahlen voraus, so kann man auch folgenden Satz aussprechen:

„Wenn zwischen den Integralen eines Fundamentalsystems der eben charakterisirten Differentialgleichungen ein irreductibles System von $n-2$ homogenen nichtlinearen Relationen besteht, so müssen ihre Integrale sämmtlich algebraisch sein. Eine Ausnahme macht nur der Fall $n-2$ parabolischer Relationen

$$y_k^2 - y_{k-1}y_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2)$$

und der Fall der Relationen

$$\begin{cases} y_1 y_2 = y_3 y_4 = \cdots = y_{2m-1} y_{2m}, \\ \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\mu_k} = \left(\frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}\right)^{\mu_1} \end{cases} \qquad (k = 2, 3, \ldots, m)$$

beziehentlich

$$\begin{cases} y_0^2 = y_1 y_2 = y_3 y_4 = \cdots = y_{2m-1} y_{2m}, \\ \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\mu_k} = \left(\frac{y_{2k-1}}{y_{2k}}\right)^{\mu_1} \end{cases} \qquad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

je nachdem $n = 2m$ oder $= 2m+1$ ist. Da, wie wir gezeigt haben, in dem letzteren Falle die Differentialgleichung nicht irreductibel ist, insofern ihre Integrale paarweise bereits einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, so kann man unter der Voraussetzung der Irreductibilität der vorgelegten Differentialgleichung diesen Fall ausschliessen und die Ausnahme auf den Fall $n-2$ parabolischer Relationen beschränken.“ — Dies letzte Resultat ist dem von Herrn *Fuchs* für die Differentialgleichungen dritter und von Herrn *Ludw. Schlesinger* für die Differentialgleichungen vierter Ordnung gefundenen ganz analog.

Berlin, Juni 1893.

On the Sextic resolvent equations of *Jacobi* and *Kronecker*.

(By Prof. *Cayley* in Cambridge.)

The equations referred to are the first of them that given by *Jacobi* in the paper „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes“ (this journal t. XIII (1835) pp. 340—352) under the heading „Observatio de aequatione sexti gradus ad quam aequationes sexti gradus revocari possunt“, and the second that of *Kronecker* in the note „Sur la résolution de l'équation du cinquième degré“ (Comptes Rendus t. XLVI (1858) pp. 1150—1152). *Jacobi*s equation is closely connected with that obtained by *Malfatti* in 1771, see *Brioschi*'s paper „Sulla resolvente di *Malfatti* per l'equazione del quinto grado“ Mem. R. Ist. Lomb. t. IX (1863) but the characteristic property first presents itself in *Jacobi*'s form, and I think the equation is properly described as *Jacobi*'s resolvent equation. The other equation has been always known as *Kronecker*'s resolvent equation; it belongs to the class of equations for the multiplier of an elliptic function considered by *Jacobi* in the paper „Suite des notices sur les fonctions elliptiques“ (this journal t. III (1828) pp. 303—310, see p. 308). Say *Kronecker*'s equation belongs to the class of *Jacobi*s Multiplier Equations. We have in regard to it the paper by *Brioschi* „Sul metodo di *Kronecker* per la resoluzione delle equazioni di quinto grado“ (Atti Ist. Lomb. t. I (1858) pp. 275—282), and see also the „Appendice terza“ to his translation of my Elliptic Functions (Milan 1880): it seems to me however that the theory of *Kronecker*'s equation has not hitherto been exhibited in the clearest form.

I consider the forms

12345	13524
13254	12435
24315	23541
35421	34152
41532	45213
52143	51324

which, if in the first instance the figures are regarded as points, represent the twelve pentagons which can be formed with the points 1, 2, 3, 4, 5; each form in the right hand column is derived from the corresponding form in the lefthand column by ***stellation***, say we have $13524 = S12345$, and so in other cases.

A pentagon is in general reversible, but we sometimes consider it as irreversible (viz. we distinguish between the pentagons 12345 and 15432); when this is so we write $15432 = R12345$, and we have thus twelve new forms, in all twentyfour forms. The symbols R, S are such that $R^2 = 1$, $S^2 = R$, $RS = SR$, $S^4 = 1$. But for a reversible pentagon, there is no occasion to use the symbol R, and we have simply $S^2 = 1$.

In a somewhat different point of view, we may for an irreversible pentagon write

12345 to denote any one of the forms 12345, 23451, 34512, 45123, 51234,
$R12345$ - - - - - - - 15432, 54321, 43215, 32154, 21543

and for a reversible pentagon 12345 to denote any one of these same ten forms.

Each pentagon gives thus ten forms, viz. we have in all 120 forms which all are the different arrangements of the five figures. But further regarding the arrangement 12345 as positive, then the forms in the left-hand column are each of them positive, and the ten forms derived from any one of these are each of them positive, that is the forms in the left-hand column give all the 60 positive arrangements of the five figures: and similarly the forms in the right hand column give all the 60 negative arrangements of the five figures.

Taking 1, 2, 3, 4, 5 to denote any quantities, or say the five roots x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 of a quintic equation, we regard 12345, ... as denoting functions of these roots: in particular 12345 may denote a cyclic reversible function, the analogue of the reversible pentagon, or it may denote a cyclic irreversible function, the analogue of the irreversible pentagon.

Jacobi's resolvent equation.

The most simple course is to take 12345 a cyclic reversible function of the roots x; a root of the resolvent equation is then 12345—13524, $= (1-S)12345$, and the six roots are

$$z_1 = (1-S)\,12345,$$
$$z_2 = (1-S)\,13254,$$
$$z_3 = (1-S)\,24315,$$
$$z_4 = (1-S)\,35421,$$
$$z_5 = (1-S)\,41532,$$
$$z_6 = (1-S)\,52143.$$

Here effecting on the roots x any positive substitution whatever we permute *inter se* the roots z, but effecting on the roots x any negative substitution whatever, then reversing the signs of all the roots z, we permute *inter se* these reversed values. Thus effecting on the root z_1 the negative substitution 12, it becomes $(1-S)21345$ which is $=(1-S)S23514=(S-S^2)$ (that is $S-1$ or $-(1-S))23514=-(1-S)41532=-z_4$; and similarly for the effect of the same substitution 12 upon any other of the roots z.

It follows that any rational symmetrical function of the roots z is a two-valued function of the coefficients of the quintic equation, viz. it is a function of the form $P+Q\sqrt{\Delta}$, where Δ is the discriminant and P, Q are rational functions of the coefficients of the quintic equation.

In particular if 12345, ... are rational and integral functions of the roots x, then for any rational and integral function of the roots z, we have P and Q rational and integral functions of the coefficients, and any rational and integral homogeneous function of the roots z, according as it is of an even or an odd degree in these roots, will be of the form P or of the form $Q\sqrt{\Delta}$; the resolvent equation is thus of the form

$$(1,\ B\sqrt{\Delta},\ C,\ D\sqrt{\Delta},\ E,\ F\sqrt{\Delta},\ G \between z,\ 1)^6 = 0,$$

where Δ is the discriminant, and B, C, D, E, F, G are rational and integral functions of the coefficients of the quintic equation.

The most simple form of the function 12345 is that employed by *Jacobi* and for which $12345=12+23+34+45+51$, where 12, ... denote x_1x_2, ... respectively.

For comparison with *Kronecker*'s equation it is proper to take 12345 a cyclic *irreversible* function of the roots x; we have then

$$12345+15432 = (1+R)12345,$$

a cyclic reversible function, and the roots of *Jacobi*'s equation will be in the first (or since *Kronecker* writes x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 instead of x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, in the second) of the following two forms, say

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1+R)(1-S)\,12345, \;\big|\; 01234,\\
z_2 &= (1+R)(1-S)\,13254, \;\big|\; 02143,\\
z_3 &= (1+R)(1-S)\,24315, \;\big|\; 13204,\\
z_4 &= (1+R)(1-S)\,35421, \;\big|\; 24310,\\
z_5 &= (1+R)(1-S)\,41532, \;\big|\; 30421,\\
z_6 &= (1+R)(1-S)\,52143; \;\big|\; 41032,
\end{aligned}$$

viz. in the first form the terms are 12345, ..., and in the second they are 01234, ..., but the theory is in no wise altered by this change of form.

Kronecker's resolvent equation.

Kronecker writes x_m to denote x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 according as the residue of m (mod. 5) is $= 0$, 1, 2, 3 or 4: then putting

$$x_m x_{m+n}^2 x_{m+2n}^2 + v\, x_m^3 x_{m+n} x_{m+2n} = m.m+n.m+2n$$

a root is

$$\begin{aligned}
f = \quad & (012+123+234+340+412)\sin\frac{2\pi}{5}\\
& +(024+130+241+302+413)\sin\frac{4\pi}{5}\\
& +(031+142+203+314+420)\sin\frac{6\pi}{5}\\
& +(043+104+210+321+432)\sin\frac{8\pi}{5}
\end{aligned}$$

and the other roots are deduced from this by changing 01234 into 03412, 14023, 20134, 31240, 42301 respectively.

Taking ε an imaginary fifth root of unity, say $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, so that $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$, $\sin\frac{8\pi}{5}$ are as $\varepsilon-\varepsilon^4$, $\varepsilon^2-\varepsilon^3$, $\varepsilon^3-\varepsilon^2$, $\varepsilon^4-\varepsilon$; also writing

$$01234 = 012+123+234+340+412, \quad \ldots$$

so that 01234, ..., are cyclic irreversible functions of the roots x, then the expression for the root f is

$$\begin{aligned}
f = \quad & (\varepsilon-\varepsilon^4)01234+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)02413\\
& -(\varepsilon-\varepsilon^4)04321-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)03142
\end{aligned}$$

or as this may be written

$$f = \{(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S\}01234,$$

and the expressions for the six roots are

$$\begin{aligned}
f &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,01234,\\
f_0 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,03412,\\
f_1 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,14023,\\
f_2 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,20134,\\
f_3 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,31240,\\
f_4 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,42301.
\end{aligned}$$

I write down the analogous functions

$$\begin{aligned}
F &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,03142, \quad (= RS\,01234),\\
F_0 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,01324, \quad (= RS\,03412),\\
F_1 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,12430, \quad (= RS\,14023),\\
F_2 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,23041, \quad (= RS\,20134),\\
F_3 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,34102, \quad (= RS\,31240),\\
F_4 &= |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon-\varepsilon^3)(1-R)S|\,40213, \quad (= RS\,42301),
\end{aligned}$$

and this being so, I say that any positive substitution on the roots x permutes *inter se* the roots f, reversing in some cases the signs; and that any negative substitution on the roots x changes the roots f into the roots F, permuting these roots *inter se* and reversing in some cases the signs and similarly as to the effect on the roots F of a positive substitution and a negative substitution respectively.

Thus the positive substitution 123 changes

$$\begin{aligned}
f \quad &\text{into} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,02314 &&= f_1,\\
f_0 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,01423 &&= f_4,\\
f_1 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,24031 &&= f_3,\\
f_2 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,30214 = R\,03412 &&= -f_0,\\
f_3 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,12340 &&= f,\\
f_4 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,43102 = R\,20134 &&= -f_2;
\end{aligned}$$

viz. f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 are changed into f_1, f_4, f_3, $-f_0$, f, $-f_2$.

And similarly the negative substitution 12 changes

$$\begin{aligned}
f \quad &\text{into} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,02134 &&= F_4,\\
f_0 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,03421 = R\,12430 &&= -F_1,\\
f_1 \quad &\text{-} \quad |(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S|\,24013 &&= F_0,
\end{aligned}$$

$$f_2 \text{ into } \{(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S\}\,10234 = F_3,$$
$$f_3 \text{ - } \{(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S\}\,32140 = R23041 = -F_2,$$
$$f_4 \text{ - } \{(\varepsilon-\varepsilon^4)(1-R)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)(1-R)S\}\,41302 = R03142 = -F,$$

viz. f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 are changed into F_4, $-F_1$, F_0, F_3, $-F_2$, $-F$.

Hence considering the equation the roots of which are f^2, f_0^2, f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2, this is an equation of the form

$$(1,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g \between f^2,\ 1)^6 = 0,$$

and similarly the equation the roots of which are F^2, F_0^2, F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2 is an equation of the form

$$(1,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G \between F^2,\ 1)^6 = 0,$$

where b and B, are conjugate values $\beta+\beta'\sqrt{\Delta}$, $\beta-\beta'\sqrt{\Delta}$, c and C are conjugate values $\gamma+\gamma'\sqrt{\Delta}$, $\gamma-\gamma'\sqrt{\Delta}$, ... of two-valued functions of the form $P\pm Q\sqrt{\Delta}$, Δ being the discriminant equation, and P and Q rational functions of the coefficients of the quintic equation.

Each term $x_0x_1^2x_2^2$ and $x_0^3x_1x_2$ of *Kronecker*'s function $x_0x_1^2x_2^2+vx_0^3x_1x_2$ is of the form 0.12 $(=0.21)$ a function of x_0 into a symmetrical function of x_1, x_2; and it is by reason hereof that the roots f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 are connected by linear relations such that the equation belongs to the class of *Jacobi*'s multiplier equations. Thus in the expressions for these roots, attending first to the terms multiplied by $\varepsilon-\varepsilon^4$ we have

$$f = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(12-34)+1(23-04)+2(34-01)+3(04-12)+4(01-23),$$
$$f_0 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(34-12)+1(02-34)+2(03-14)+3(14-02)+4(12-03),$$
$$f_1 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(23-14)+1(04-23)+2(13-04)+3(14-02)+4(02-13),$$
$$f_2 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(13-24)+1(34-02)+2(01-34)+3(24-01)+4(02-13),$$
$$f_3 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(13-24)+1(24-03)+2(04-13)+3(12-04)+4(03-12),$$
$$f_4 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0(14-23)+1(24-03)+2(03-14)+3(01-24)+4(23-01),$$

and next to the terms multiplied by $\varepsilon^2-\varepsilon^3$ we have

$$f = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(24-13)+1(03-24)+2(14-03)+3(02-14)+4(13-02),$$
$$f_0 = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(24-13)+1(04-23)+2(13-04)+3(01-24)+4(23-01),$$
$$f_1 = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(34-12)+1(03-24)+2(01-34)+3(24-01)+4(12-03),$$
$$f_2 = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(23-14)+1(04-23)+2(14-03)+3(12-04)+4(03-12),$$
$$f_3 = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(14-23)+1(34-02)+2(01-34)+3(02-14)+4(23-01),$$
$$f_4 = (\varepsilon^2-\varepsilon^3).0(34-12)+1(02-34)+2(04-13)+3(12-04)+4(13-02),$$

we have thus

$$\begin{aligned} f_0+f_1+f_2+f_3+f_4 = (\varepsilon-\varepsilon^4).0\{34-12+2(13-24)\}+(\varepsilon^2-\varepsilon^3).0\{24-13+2(34-12)\} \\ +1\{04-23+2(24-03)\}+ \quad 1\{03-24+2(04-23)\} \\ +2\{01-34+2(03-14)\}+ \quad 2\{14-03+2(10-24)\} \\ +3\{12-04+2(14-02)\}+ \quad 3\{20-14+2(12-04)\} \\ +4\{23-01+2(02-13)\}+ \quad 4\{13-02+2(23-01)\} \\ = -\{(\varepsilon-\varepsilon^4)+2(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\}(f)_1-\{2(\varepsilon-\varepsilon^4)-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\}(f)_2 \end{aligned}$$

if for a moment $(f)_1$ denotes the terms of f which are multiplied by $\varepsilon-\varepsilon^4$ and $(f)_2$ the terms of f which are multiplied by $\varepsilon^2-\varepsilon^3$.

But we have

$$\sqrt{5} = \varepsilon+\varepsilon^4-\varepsilon^2-\varepsilon^3,$$

whence

$$\begin{aligned} \sqrt{5}(\varepsilon-\varepsilon^4) &= \varepsilon-\varepsilon^4+2(\varepsilon^2-\varepsilon^3), \\ \sqrt{5}(\varepsilon^2-\varepsilon^3) &= 2(\varepsilon-\varepsilon^4)+\varepsilon^2-\varepsilon^3 \end{aligned}$$

and hence the equation just obtained is $f_0+f_1+f_2+f_3+f_4 = -\sqrt{5}f$, viz. this equation, being satisfied separately by the terms such as $x_0x_1^2x_2^2$ and $x_0^3x_1x_2$ will be satisfied for $x_0x_1^2x_2^2+vx_0^3x_1x_2$ and so for the like equations which follow. (I notice that *Brioschi* has $+\sqrt{5}f$; the difference is quite immaterial, since the formulae would coincide by reversing the sign of f, or those of f_0, f_1, f_2, f_3, f_4).

We show further that $f_0+\varepsilon^2f_1+\varepsilon^4f_2+\varepsilon f_3+\varepsilon^3f_4 = 0$; to verify this observe that in this expression the terms multiplied by $0\ (=x_0)$ are

$$\begin{aligned} &(\varepsilon-\varepsilon^4)\{34-12+\varepsilon^2(23-14)+\varepsilon^4(13-24)+\varepsilon(13-24)+\varepsilon^3(14-23)\} \\ &+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\{24-13+\varepsilon^2(34-12)+\varepsilon^4(23-13)+\varepsilon(14-23)+\varepsilon^3(34-12)\}, \end{aligned}$$

where the terms containing 12, 13, 14, 23, 24, 34 respectively are each $=0$, viz. the coefficient of 12 is $(-\varepsilon+\varepsilon^4)+(-\varepsilon^4+1)+(-1+\varepsilon) = 0$, that of 13 is $1-\varepsilon^3+(\varepsilon^2-1)+(-\varepsilon^2+\varepsilon^3) = 0$, and so for the other coefficients. In like manner it appears that the terms multiplied by 1, 2, 3, 4 $(= x_1, x_2, x_3, x_4)$ respectively are each $=0$, and thus the equation in question is verified. And in like manner it is shown that

$$f_0+\varepsilon^3f_1+\varepsilon f_2+\varepsilon^4f_3+\varepsilon^2f_4 = 0.$$

The roots f thus satisfy the relations

$$\begin{aligned} f_0+ f_1+ f_2+ f_3+ f_4 &= -f\sqrt{5}, \\ f_0+\varepsilon^2 f_1+\varepsilon^4 f_2+ \varepsilon f_3+\varepsilon^3 f_4 &= 0, \\ f_0+\varepsilon^3 f_1+ \varepsilon f_2+\varepsilon^4 f_3+\varepsilon^2 f_4 &= 0, \end{aligned}$$

or the equation for f^2 belongs to the class of *Jacobi*'s multiplier equations. Hence (see *Brioschi*'s Appendice terza before referred to) the form of the equation is

$$(f^2-a)^6-4a(f^2-a)^5+10b(f^2-a)^3-4c(f^2-a)+5b^2-4ac = 0,$$

or determining the arbitrary coefficient v so that a may be $=0$, the form is $f^{12}+10bf^6-4cf^2+5b^2=0$, which is *Kronecker*'s equation

$$f^{12}-10\varphi f^6+5\psi^2 = \psi f^2.$$

As to the meaning of the coefficients a, b, c I recall that in virtue of the foregoing linear relations between the roots, these may be expressed in terms of three arbitrary quantities a_0, a_1, a_2 as follows:

$$\begin{aligned} f &= a_0\sqrt{5}, \\ f_0 &= a_0+ a_1+ a_2, \\ f_1 &= a_0+ \varepsilon a_1+\varepsilon^4 a_2, \\ f_2 &= a_0+\varepsilon^2 a_1+\varepsilon^3 a_2, \\ f_3 &= a_0+\varepsilon^3 a_1+\varepsilon^2 a_2, \\ f_4 &= a_0+\varepsilon^4 a_1+ \varepsilon a_2, \end{aligned}$$

and a, b, c are then determinate functions of a_0, a_1, a_2, viz. we have

$$\begin{aligned} a &= a_0^2+a_1a_2, \\ b &= 8a_0^4a_1a_2-2a_0^2a_1^2a_2^2+a_1^3a_2^3-a_0(a_1^5+a_2^5), \\ c &= 80a_0^6a_1^2a_2^2-40a_0^4a_1^3a_2^3+5a_0^2a_1^4a_2^4+a_1^5a_2^5, \\ &\quad -a_0(32a_0^4-20a_0^2a_1a_2+5a_1^2a_2^2)(a_1^5+a_2^5) \\ &\quad +\tfrac{1}{4}(a_1^5+a_2^5)^2; \end{aligned}$$

so that for $a=0$, and therefore $a_0=\sqrt{-a_1a_2}$ we have

$$\begin{aligned} b &= 11a_1^3a_2^3-a_0(a_1^5+a_2^5), \\ c &= -44a_1^5a_2^5-57a_0a_1^2a_2^2(a_1^5+a_2^5)+\tfrac{1}{4}(a_1^5+a_2^5)^2, \end{aligned}$$

but I do not know that for *Kronecker*'s form the actual values of a_0, a_1, a_2 in terms of the coefficients of the quintic equation have been calculated.

Zur *Briot-Bouquet*schen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

In ihrer grundlegenden Abhandlung im Journal de l'École Polytechnique, Cah. 36, untersuchen *Briot* und *Bouquet* S. 161 ff. die Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dz} = f(u, z)$$

mit dem Anfangswerthe $u = u_1$ für $z = z_1$, wenn $f(u, z)$ als Quotient zweier Potenzreihen von $u-u_1$, $z-z_1$ erscheint, welche für $u = u_1$, $z = z_1$, gleichzeitig verschwinden. Die Ordnung μ von $u' = u-u_1$ in Bezug auf $z' = z-z_1$ ergiebt sich als rationale Zahl, und unter dieser Voraussetzung wird die Differentialgleichung auf einige einfachere Typen zurückgeführt, deren erster, die Differentialgleichung

$$z\frac{du}{dz} = au+bz+\cdots,$$

durch Herrn *Poincaré* (Journ. de l'Éc. Pol. cah. 45) und Herrn *Picard* (Comptes Rendus Bd. 87) eine weitere Behandlung gefunden hat. Ist der reelle Theil von a positiv, ohne dass jedoch a eine ganze positive Zahl ist, so besitzt die letztere Differentialgleichung ein für $z = 0$ verschwindendes Integral von der Form

$$u = \Sigma c_{\lambda\mu} z^{\lambda+\mu a} \qquad (\lambda, \mu = 0, \ldots, \infty;\ c_{00} = 0),$$

worin der Coefficient c_{01} von z^a willkürlich gewählt werden kann. Dieses Integral ist von der Ordnung a, falls der reelle Theil von a kleiner als Eins ist.

Somit können bei Differentialgleichungen von der von *Briot* und *Bouquet* betrachteten Gestalt auch andere als rationale Ordnungszahlen vorkommen. Die Ergänzung, deren die *Briot-Bouquet*sche Theorie bedarf,

damit sie auch die etwaigen Integrale von nicht rationaler Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung liefert, soll im Folgenden zu geben versucht werden*).

§ 1.

Die Differentialgleichung (B.—B. S. 161)

$$(A'u'^{\alpha'}z'^{\beta'}+\cdots)\frac{du'}{dz'}-(Au'^{\alpha}z'^{\beta}+\cdots)=0$$

habe ein Integral u' von der Ordnung μ in Bezug auf z'; die Gruppe der Glieder geringster Ordnung enthalte die Glieder

$$A'u'^{\alpha'}z'^{\beta'}\frac{du'}{dz'},\quad Au'^{\alpha}z'^{\beta}.$$

Der für μ sich ergebende Werth

$$\mu=\frac{\beta+1-\beta'}{\alpha'+1-\alpha}$$

(B.—B. Nr. 75, S. 162) erscheint in unbestimmter Form, wenn $\alpha'+1=\alpha$, $\beta+1=\beta'$ ist. Zwei Glieder, deren Exponenten diese Bedingungen erfüllen, können unter Umständen die Gruppe der Glieder geringster Ordnung für ein Integral von nicht rationaler Ordnung μ bilden. Der B.—B. Nr. 76 construirte Linienzug, dessen einzelne Theile die rationalen Ordnungszahlen bestimmen, enthält unter unserer Voraussetzung einen doppelten Punkt $(\alpha,\beta+1)=(\alpha'+1,\beta')$, welcher den Schnittpunkt P_i zweier auf einander folgenden Linien $P_{i-1}P_i$ und P_iP_{i+1} bilden möge. Diesen Linien entsprechen die rationalen Ordnungszahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}\left(\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}\right)$. Die beiden dem Doppelpunkte P_i zugeordneten Glieder der Differentialgleichung seien die Glieder geringster Ordnung für die Ordnungszahl $\mu=\varrho+i\sigma$ $(\varrho>0)$. Ist also

$$\lim\frac{u'}{z'^{\mu}}=c$$

endlich und von Null verschieden, so kann wegen

$$\lim\frac{Au'^{\alpha}z'^{\beta}}{z'^{\alpha\mu+\beta}}=cA,\quad \lim\frac{A'u'^{\alpha'}z'^{\beta'}\frac{du'}{dz'}}{z'^{(\alpha'+1)\mu+\beta'-1}}=\mu cA'$$

die Ordnungszahl nur den Werth

$$\mu=\frac{A}{A'}$$

---

*) Hinweisungen auf die *Briot-Bouquet*sche Arbeit werden durch B.—B. mit folgender Seitenzahl oder Artikelnummer gegeben.

haben. Wir setzen künftig $A' = 1$, so dass $\mu = A$ sein muss. Die beiden dem Punkte P_i entsprechenden Glieder können jedoch nur dann die niedrigsten Glieder der Differentialgleichung sein, wenn $\Re(A)$, der reelle Theil von A, zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ liegt. Es wird sich herausstellen, dass die Differentialgleichung unter der Voraussetzung

$$\frac{p}{q} < \Re(A) < \frac{p'}{q'}$$

im allgemeinen Integrale von der Ordnung A besitzt.

Die B.—B. Nr. 77 zur Ermittelung der Integrale von der Ordnung $\frac{p}{q}$ angewandte Substitution

$$z' = t^q, \quad u' = v t^p$$

führt zu der Differentialgleichung

$$(v^{\alpha'} + \cdots)\left(pv + t\frac{dv}{dt}\right) - q(Av^{\alpha} + \cdots) = 0.$$

Der zu $t = 0$ gehörige Werth v_0 von v, welcher der Gleichung

$$F(v_0) = p(v_0^{\alpha'} + \cdots)v_0 - q(Av_0^{\alpha} + \cdots) = 0$$

(deren Glieder den auf der Linie $P_{i-1}P_i$ gelegenen Punkten entsprechen) genügt, muss hier, wo es sich um ein Integral von der Ordnung $A\left(\Re(A) > \frac{p}{q}\right)$ handelt, gleich Null sein. Hat der Punkt P_i die Abscisse $m+1$, ist also für ihn $\alpha' = m$, $\alpha = m+1$, so ist für alle anderen Punkte der Linie $P_{i-1}P_i$ $\alpha' > m$ bzw. $\alpha > m+1$, die Gleichung

$$F(v_0) = v_0^{m+1}(p - qA + \cdots) = 0$$

hat die $(m+1)$-fache Wurzel $v_0 = 0$. Unsere Differentialgleichung hat nunmehr die Gestalt

$$(v^m + B' t^{\lambda'} v^{\mu'} + \cdots) t\frac{dv}{dt} = (qA - p)v^{m+1} + Bt^{\lambda} v^{\mu} + \cdots,$$

wobei links in der Klammer die Glieder v^0, v^1, …, v^{m-1}, rechts v^0, v^1, …, v^m fehlen. Es handelt sich nun um die Entwickelung eines Integrals v dieser Differentialgleichung, welches in Bezug auf t die Ordnung $qA - p$ besitzt.

§ 2.

Wir haben nun die Differentialgleichung

$$\Sigma B'_{\lambda'\mu'} t^{\lambda'} v^{\mu'} . t\frac{dv}{dt} = \Sigma B_{\lambda\mu} t^{\lambda} v^{\mu} \qquad (\lambda, \mu;\ \lambda', \mu' = 0, \ldots, \infty)$$

unter der Voraussetzung

$$B'_{00} = B'_{01} = \cdots = B'_{0,m-1} = 0, \quad B'_{0m} = 1,$$
$$B_{00} = B_{01} = \cdots = B_{0m} = 0, \quad B_{0,m+1} = b = qA - p^{*}).$$

Die für diese Differentialgleichung nach B.—B. Nr. 76 zu zeichnende gebrochene Linie enthält als ersten Theil eine Parallele zur Abscissenaxe im Abstande 1, welche in dem zweifachen Punkte $(m+1, 1)$ endigt; der sich anschliessenden Linie entspricht die Ordnungszahl $\frac{r}{s}$, so dass $\frac{r}{s} = q\frac{p'}{q'} - p$ ist. Da links von dieser Linie keine Punkte liegen, so verschwinden in der Differentialgleichung alle Coefficienten $B'_{\lambda'\mu'}$, für welche $\frac{\lambda'}{m-\mu'} < \frac{r}{s}$, und alle Coefficienten $B_{\lambda\mu}$, für welche $\frac{\lambda}{m+1-\mu} < \frac{r}{s}$ ist. Auf der linken bzw. rechten Seite der Differentialgleichung ist also

$$\lambda' s + \mu' r \geqq mr, \quad \lambda s + \mu r \geqq (m+1)r.$$

Unter der Voraussetzung $\frac{p}{q} < \Re(A) < \frac{p'}{q'}$ ist $0 < \Re(b) < \frac{r}{s}$, und wir haben die Integrale der Ordnung b zu bestimmen. Zur Vereinfachung der Differentialgleichung benutzen wir ein (im allgemeinen vorhandenes) Integral von der Ordnung $\frac{r}{s}$ oder ein Integral $r$ter Ordnung der durch die Substitution

$$t = x^s$$

entstehenden Differentialgleichung

$$\Sigma B'_{\lambda'\mu'} x^{\lambda' s} v^{\mu'} . x \frac{dv}{dx} = s \Sigma B_{\lambda\mu} x^{\lambda s} v^{\mu}.$$

Setzt man zur Berechnung dieses Integrals (B.—B. No. 77)

$$v = x^r w,$$

so ergiebt sich für w die Differentialgleichung

$$\Sigma B'_{\lambda'\mu'} x^{\lambda' s + \mu' r - mr} w^{\mu'} . \left(rw + x\frac{dw}{dx} \right) = s \Sigma B_{\lambda\mu} x^{\lambda s + \mu r - (m+1)r} w^{\mu}.$$

Nachdem w_0 aus der Gleichung

$$F(w_0) = r w_0 \Sigma B'_{\lambda'\mu'} w_0^{\mu'} - s \Sigma B_{\lambda\mu} w_0^{\mu} = 0 \qquad (\lambda' s + \mu' r = mr, \ \lambda s + \mu r = (m+1)r)$$

---

*) Für $m = 0$ ist dies die Differentialgleichung B.—B. Nr. 80 ff.

berechnet ist, setzt man $w = w_0 + \zeta$ und erhält die Differentialgleichung

$$x\frac{d\zeta}{dx} = \frac{-F'(w_0).\zeta + \cdots}{\Sigma B'_{\lambda'\mu'} w_0^{\mu'} + \cdots},$$

welche, wenn $\Sigma B'_{\lambda'\mu'} w_0^{\mu'}$ $(\lambda' s + \mu' r = mr)$ nicht gleich Null und $-\frac{F(w_0)}{\Sigma B'_{\lambda'\mu'} w_0^{\mu'}}$ keine ganze positive Zahl ist*), durch eine für $x = 0$ verschwindende Potenzreihe ζ von x befriedigt wird (B.—B. No. 80). Die Differentialgleichung zwischen v und x besitzt also ein Integral von der Form

$$\varphi = x^r \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} c_\lambda x^\lambda.$$

Setzt man

$$v = \varphi + y,$$

so hat man

$$\Sigma B'_{\lambda'\mu'} x^{\lambda' s}(\varphi^{\mu'} + \mu' \varphi^{\mu'-1} y + \cdots + y^{\mu'}).x\frac{dy}{dx} = s\Sigma B_{\lambda\mu} x^{\lambda s}(\mu\varphi^{\mu-1} y + \cdots + y^{\mu})$$

$$- \Sigma B'_{\lambda'\mu'} x^{\lambda' s}(\mu' \varphi^{\mu'-1} y + \cdots + y^{\mu'}).x\frac{d\varphi}{dx}.$$

Unter Berücksichtigung der Form von φ erhält diese Differentialgleichung die Gestalt

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta . x\frac{dy}{dx} = y\Sigma A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad (\alpha + \beta r \geqq mr).$$

Insbesondere ist $A'_{0m} = B'_{0m} = 1$, $A_{0m} = sB_{0m} = sb$, $0 < \Re(sb) < r$.

Beschäftigen wir uns zunächst mit dem Falle $r = 1$, auf welchen der Fall $r > 1$ zurückgeführt werden kann.

§ 3.

Der nunmehr zu integrirenden Differentialgleichung geben wir die Form

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta . x\frac{dy}{dx} = y\Sigma A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad (\alpha + \beta \geqq m),$$

wo $A'_{0m} = 1$, $A_{0m} = sb = a$, $0 < \Re(a) < 1$ ist. Für $m = 0$ geht sie in die B.—B. No. 72 sowie von Herrn *Poincaré* und Herrn *Picard* a. a. O. behandelte Differentialgleichung über. Da wir zur Bestimmung eines Integrals von der Ordnung a, $\Re(a) < 1$, die Substitution $y = xz$ nicht anwenden können, so setzen wir

$$x = ty,$$

---

*) Diese beiden Ausnahmefälle bleiben von der Untersuchung ausgeschlossen.

so dass die Differentialgleichung übergeht in

$$\Sigma(A'_{\alpha\beta}-A_{\alpha\beta})t^{\alpha}y^{\alpha+\beta-m}.t\frac{dy}{dt} = y\Sigma A_{\alpha\beta}t^{\alpha}y^{\alpha+\beta-m}$$

oder, da $A'_{0m}-A_{0m}=1-a$ nicht Null ist, in eine Differentialgleichung von der Form

$$t\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{a}{1-a}+\cdots\right),$$

welcher, da $\Re\left(\frac{a}{1-a}\right)$ wegen $0<\Re(a)<1$ positiv ist, genügt wird durch eine Reihenentwickelung von der Form

$$y = t^{\frac{a}{1-a}}\Sigma c_{\lambda\mu}t^{\lambda+\mu\frac{a}{1-a}} \qquad (\lambda,\ \mu=0,\ \ldots,\ \infty),$$

worin c_{00} willkürlich gewählt werden kann*). Dann ist

$$x = t^{\frac{1}{1-a}}\Sigma c_{\lambda\mu}t^{\lambda+\mu\frac{a}{1-a}} \qquad (\lambda,\ \mu=0,\ \ldots,\ \infty),$$

und man hat hieraus für t als Function von x eine Reihenentwickelung herzuleiten und dieselbe in den Ausdruck für y einzusetzen.

Hierzu dient folgender Hülfssatz: Ist

$$Y = X^h\Sigma c_{\lambda\mu}X^{\lambda+\mu h} \qquad (\lambda,\ \mu=0,\ \ldots,\ \infty),$$

wobei c_{00} nicht verschwindet und h einen positiven reellen Theil hat, so ist

$$X = Y^{\frac{1}{h}}\Sigma C_{\lambda\mu}Y^{\lambda+\frac{\mu}{h}} \qquad (\lambda,\ \mu=0,\ \ldots,\ \infty).$$

Es ist nämlich

$$X\frac{dY}{dX} = X^h\Sigma(\lambda+(\mu+1)h)c_{\lambda\mu}X^{\lambda+\mu h};$$

aus

$$Y = (c_{00}+c_{10}X+\cdots)X^h+\cdots$$

ergiebt sich, da c_{00} nicht Null ist, X^h als Potenzreihe von X und Y, folglich wird

$$X\frac{dY}{dX} = Y\varphi(X,\ Y),\quad \varphi(0,\ 0)=h,$$

---

*) Vgl. *Poincaré*, Journ. de l'Éc. Pol. cah. 45. Ist $\frac{a}{1-a}=n$ eine ganze positive Zahl, so führt die Substitution $y=t^n z$ zu einer Differentialgleichung, welche durch eine Potenzreihe z von t mit willkürlichem Anfangswerth befriedigt wird (B.—B. Nr. 86). Die Differentialgleichung für y besitzt also hier ein Integral von der Form $y=t^n\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda t^\lambda$ mit willkürlichem c_0, welche in der obigen allgemeinen Form enthalten ist.

wo $\varphi(X, Y)$ eine Potenzreihe von X und Y bedeutet. Für X als Function von Y hat man die Differentialgleichung

$$Y\frac{dX}{dY} = X\psi(X, Y), \quad \psi(0, 0) = \frac{1}{h},$$

aus welcher sich eine Reihe von der Form

$$X = Y^{\frac{1}{h}} \Sigma C_{\lambda\mu} Y^{\lambda+\frac{\mu}{h}} \qquad (\lambda, \mu = 0, \ldots, \infty)$$

ergiebt.

Aus der Reihe

$$x^a = t^{\frac{a}{1-a}} \Sigma c'_{\lambda\mu} t^{\lambda+\mu\frac{a}{1-a}}$$

ergiebt sich hiernach

$$t = x^{1-a} \Sigma C'_{\lambda\mu} x^{\lambda a+\mu(1-a)},$$

so dass die Reihe für y die folgende Gestalt annimmt:

$$y = x^a \Sigma C_{\lambda\mu} x^{\lambda a+\mu(1-a)} \qquad (\lambda, \mu = 0, \ldots, \infty)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$y = x^a \Sigma c_{\lambda\mu} x^{\lambda+\mu a} \qquad (\lambda \geqq 0, \mu \geqq -\lambda).$$

Hierbei ist C_{00} bzw. c_{00} willkürlich zu wählen. Alle betrachteten Reihen sind für hinreichend kleine absolute Beträge der Veränderlichen unbedingt convergent. Zur Berechnung der Coefficienten $c_{\lambda\mu}$ ergeben sich durch Einsetzen der Reihe in die Differentialgleichung Recursionsformeln von der Gestalt:

$$(\lambda+\mu a) c_{00}^m c_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{i=m} \left((m-i+1)A_{i,m-i} - \left((\lambda-i+(\mu+i+2)a\right)A'_{i,m-i}\right). c_{00}^{m-i} c_{\lambda-i,m-i} + \cdots.$$

Jedes Glied der rechten Seite ist abgesehen von einem Zahlenfactor von der Gestalt $A_{\alpha\beta} c_{\lambda'\mu'} c_{\lambda''\mu''} \ldots$ oder $A'_{\alpha\beta} c_{\lambda'\mu'} c_{\lambda''\mu''} \ldots$, wo $\beta+\mu'+\mu''+\cdots = \mu+m$ ist.

Für die Coefficienten $C_{\lambda\mu}$ der Reihe in der ersten Form ergiebt sich eine Recursionsformel, welche $(\lambda a+\mu(1-a))C_{00}^m C_{\lambda\mu}$ ausdrückt durch Coefficienten $C_{\lambda'\mu'}$, für welche $\lambda' \leqq \lambda$, $\mu' \leqq \mu$, $\lambda'+\mu' < \lambda+\mu$ ist. Der Anfangscoefficient c_{00} bzw. C_{00} bleibt willkürlich.

§ 4.

Die allgemeinere Differentialgleichung, zu welcher wir am Schlusse von § 2 gelangt waren, hatte die Form

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta . x\frac{dy}{dx} = y A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \qquad (\alpha+\beta r \geqq mr),$$

wobei $A'_{0,mr} = 1$, $A_{0,mr} = sb = ra$, $0 < \Re(a) < 1$, gesetzt werden möge. Die Substitution

$$y = z^r$$

führt zu der Differentialgleichung

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} x^\alpha z^{\beta r} . x \frac{dz}{dx} = z \Sigma \frac{1}{r} A_{\alpha\beta} x^\alpha z^{\beta r} \qquad (\alpha + \beta r \geqq mr),$$

welche die in § 3 behandelte Form hat, nur dass m durch mr ersetzt ist und lediglich durch r theilbare Exponenten von z vorkommen. Nach § 3 ist

$$z = x^a \Sigma c_{\lambda\mu} x^{\lambda+\mu a} \qquad (\lambda \geqq 0,\ \mu \geqq -\lambda).$$

Hier sind alle $c_{\lambda\mu}$, für welche μ nicht durch r theilbar ist, gleich Null. Sind nämlich in § 3 in der Recursionsformel für $c_{\lambda\mu}$, in welcher m durch mr zu ersetzen ist, alle $A_{\alpha\beta}$ und $A'_{\alpha\beta}$, für welche β nicht durch r theilbar ist, und alle bereits gefundenen $c_{\lambda'\mu'}$, für welche μ' nicht durch r theilbar ist, gleich Null, so muss, wenn μ nicht durch r theilbar ist, in jedem Gliede der rechten Seite entweder $A_{\alpha\beta}$ bezw. $A'_{\alpha\beta}$ oder einer der Factoren $c_{\lambda'\mu'}$, $c_{\lambda''\mu''}, \ldots$ verschwinden, da wegen $\beta + \mu' + \mu'' + \cdots = \mu + mr$ die Zahlen β, μ', μ'', $\ldots$ nicht sämmtlich durch mr theilbar sein können.

Folglich ergiebt sich für $y = z^r$ (bei anderer Bedeutung von $c_{\lambda\mu}$) eine Reihenentwickelung von der Gestalt:

$$y = x^{ra} \Sigma c_{\lambda\mu} x^{\lambda+\mu ra} \qquad (\lambda \geqq 0,\ \lambda + \mu r \geqq 0)$$

oder anders geschrieben:

$$y = x^{ra} \Sigma C_{\lambda\mu} x^{\lambda a + \mu(1-a)} \qquad (\lambda, \mu \geqq 0,\ \lambda - \mu \equiv 0 \pmod r).$$

Aus dieser Reihe für y geht infolge der Substitutionen

$$u' = vt^p, \quad z' = t^q; \quad t = x^s, \quad v = \varphi + y$$

für die ursprüngliche Differentialgleichung ein Integral von der Ordnung A hervor.

Charlottenburg, 16. September 1893.

Biegungscovarianten und Differentialparameter.

(Von Herrn *P. Stäckel* in Halle a. S.)

Bei der Untersuchung quadratischer Differentialformen:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

spielen eine wichtige Rolle gewisse Ausdrücke, welche aus den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ nebst deren Ableitungen und aus willkürlichen Functionen nebst deren Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung rational gebildet sind, weil sie die Eigenschaft haben, bei Einführung neuer Veränderlicher in die Ausdrücke überzugehen, welche auf dieselbe Weise aus den neuen Grössen zusammengesetzt sind. Diese ***invariablen Functionen,*** zu welchen vor allem die ***Beltrami*schen *Differentialparameter*** gehören, will ich, eine von Herrn *J. Knoblauch**) für binäre Formen vorgeschlagene Bezeichnungsweise verallgemeinernd, ***Biegungscovarianten*** der betreffenden quadratischen Differentialform von n Veränderlichen nennen.

Für die Biegungscovarianten binärer quadratischer Differentialformen gilt nun der meines Wissens zuerst von Herrn *Darboux***) bewiesene Satz, dass, ***sobald zwei von einander unabhängige Biegungscovarianten der Form gegeben sind, alle übrigen aus ihnen mittelst Beltramischer Differentialparameter erster Ordnung erhalten werden können.*** Im Folgenden will ich den entsprechenden Satz für quadratische Differentialformen von n Veränderlichen ableiten.

Sind n von einander unabhängige Biegungscovarianten

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

der quadratischen Differentialform:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa\, dp_\lambda$$

---

*) Ueber Biegungscovarianten, dieses Journal Bd. 111, S. 277 (1893).

**) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Livre VII. Chap. I (1890).

gegeben, so kann man statt der Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gerade $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ einführen, wodurch die Form in

$$\sum_{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa\lambda} d\varphi_\varkappa d\varphi_\lambda \qquad (A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa})$$

übergehen möge. Aus der Definition der Biegungscovarianten folgt dann sofort, dass alles darauf ankommt zu zeigen, erstens wie man die $A_{\varkappa\lambda}$ aus den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ mittelst *Beltrami*scher Differentialparameter erster Ordnung gewinnen kann, und zweitens wie sich bei Anwendung desselben Verfahrens die ersten partiellen Ableitungen irgend einer Function f aus $f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ergeben.

Zur Definition des *Beltrami*schen Differentialparameters erster Ordnung $\Delta(u, v)$ führe ich neben dem symmetrischen Systeme der $A_{\varkappa\lambda} = A_{\lambda\varkappa}$, dessen Determinante mit A bezeichnet werde, das *reciproke System*, nämlich die Grössen $A'_{\varkappa\lambda}$ ein, welche durch die Gleichungen:

$$\sum_{\varkappa} A_{\varkappa\lambda} A'_{\varkappa\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu} \qquad \left(\varepsilon_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases}\right)$$

definirt sind, und erhalte:

$$\Delta(u, v) = \sum_{\mu,\nu} A'_{\mu\nu} \frac{\partial u}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial v}{\partial \varphi_\nu}.$$

Es ist daher:

$$\text{(I.)} \qquad \Delta(\varphi_\varkappa, \varphi_\lambda) = \sum_{\mu,\nu} A'_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \varphi_\nu} = A'_{\varkappa\lambda},$$

so dass man umgekehrt *die Grössen $A_{\varkappa\lambda}$ als das reciproke System zu den Grössen $\Delta(\varphi_\varkappa, \varphi_\lambda)$ anzusehen hat.*

Um weiter die partiellen Ableitungen einer beliebigen Function f:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi_n}$$

in derselben Weise auszudrücken, bilde ich zunächst die zu einem Systeme von n Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ gehörige Functionaldeterminante:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = D(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Dann ist identisch:

$$\text{(II.)} \qquad D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\varkappa-1}, f, \varphi_{\varkappa+1}, \ldots, \varphi_n) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_\varkappa},$$

und es bleibt übrig nachzuweisen, dass auch die Functionaldeterminante D mittelst des Processes Δ erhalten werden kann. Zu diesem Zwecke be-

trachte ich die Determinante der Grössen $\Delta(f_\varkappa, f_\lambda)$ und finde durch wiederholte Decomposition:

$$|\Delta(f_\varkappa, f_\lambda)| = \left|\sum_{\mu\nu} A'_{\mu\nu} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial \varphi_\mu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_\nu}\right|$$
$$= \left|\sum_{\nu} A'_{\mu\nu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_\nu}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_\varkappa}{\partial \varphi_\mu}\right| \qquad (\varkappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$
$$= \left|A'_{\mu\nu}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_\nu}\right| \cdot \left|\frac{\partial f_\varkappa}{\partial \varphi_\mu}\right|,$$

sodass sich die bemerkenswerthe Identität

$$\text{(III.)} \qquad |\Delta(f_\varkappa, f_\lambda)| = |\Delta(\varphi_\varkappa, \varphi_\lambda)| \cdot D^2(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

ergiebt. Es lässt sich mithin D^2 in rationaler Weise durch die Grössen $\Delta(f_\varkappa, f_\lambda)$ und $\Delta(\varphi_\varkappa, \varphi_\lambda)$ ausdrücken.

Um jede Biegungscovariante in rationaler Form zu erhalten, muss man neben dem Symbole Δ ein zweites Symbol einführen, welches mit Δ durch die Identität (III.) verknüpft ist. Da aber D keine Covariante ist, empfiehlt es sich, nicht D selbst zu nehmen sondern den Ausdruck:

$$\Theta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)},$$

dessen Covarianteneigenschaft aus (III.) unmittelbar erhellt.

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Alle Biegungscovarianten der quadratischen Differentialform

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda}\, dp_\varkappa dp_\lambda$$

lassen sich aus n von einander unabhängigen Ausdrücken dieser Art mittelst der Beltramischen Symbole Δ und Θ bilden.

Halle a. S., October 1893.

Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung für eine reelle Primzahl als Modul und Bestimmung der Theiler ihrer Discriminante.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

§ 1.

Es sei x eine Wurzel einer beliebigen irreductiblen Gleichung des n-ten Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Alle rationalen Functionen

$$\xi = \varphi(x)$$

von x mit ganzzahligen Coefficienten bilden dann einen in sich abgeschlossenen Bereich ($\mathfrak{G}$) von algebraischen Zahlen, einen *Gattungsbereich* in *Kronecker*scher, einen Körper in *Dedekind*scher Bezeichnungsweise. Jede Zahl ξ dieses Bereiches nebst ihren n conjugirten, genügt nun ebenfalls einer Gleichung des n-ten Grades, deren Coefficienten ganze oder gebrochene rationale Zahlen sind, und deren linke Seite entweder selbst irreductibel, oder die Potenz einer irreductiblen Function ist. Im Folgenden wollen wir nur die *ganzen* algebraischen Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$), d. h. diejenigen Grössen ξ betrachten, deren Gleichung lauter ganzzahlige Coefficienten besitzt.

Bekanntlich kann man nun die ganzen Grössen des Bereiches in besonders einfacher Weise darstellen: Man kann nämlich stets ein System von n ganzen algebraischen Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$)

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n \tag{1.}$$

finden, durch dessen Elemente jede andere ganze algebraische Zahl ξ homogen und linear mit realen ganzzahligen Coefficienten dargestellt werden kann. Die Linearform:

$$w_0 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n \tag{2.}$$

stellt also alle *ganzen* algebraischen Zahlen von ($\mathfrak{G}$) und keine anderen

dar, wenn man für die Unbestimmten $(u_1, \ldots, u_n)$ alle von einander verschiedenen ganzzahligen Werthsysteme setzt. Aus diesem Grunde heisst das System (1.) ein ***Fundamentalsystem,*** die Linearform w_0 in (2.) eine ***Fundamentalform*** des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$.

Die Fundamentalform w_0 genügt nebst den n zu ihr conjugirten Linearformen für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ einer Gleichung des n-ten Grades:

$$(3.) \qquad F(w, u_1, \ldots, u_n) = w^n + U^{(1)} w^{n-1} + U^{(2)} w^{n-2} + \cdots + U^{(n)} = 0,$$

deren Coefficienten offenbar homogene Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ mit ganzzahligen Coefficienten sind. Legt man hier den Grössen u alle möglichen ganzzahligen Werthe bei, so erhält man die Gleichungen für alle ganzen Grössen des Bereiches $(\mathfrak{G})$ und nur diese; aus diesem Grunde wird jene Gleichung für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ die ***Fundamentalgleichung*** des Bereiches $(\mathfrak{G})$ genannt. Diese Gleichung ist offenbar irreductibel für unbestimmte Werthe der Grössen u, denn wenn w_0 einer Gleichung von niedrigerem als dem n-ten Grade genügte, so würde dasselbe von jeder Grösse ξ des Bereiches, speciell also auch von x gelten, was nicht der Fall ist. Die Fundamentalform genügt also für unbestimmte Werthe der Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ keiner Gleichung von niedrigerem als dem n-ten Grade.

Betrachtet man aber die Fundamentalform nicht selbst, sondern ihren Rest für eine beliebig gegebene Primzahl p, fragt man also nach der Congruenz niedrigsten Grades:

$$\Phi(w_0, u_1, \ldots, u_n) = V_0 w^r + V_1 w^{r-1} + \cdots + V_r \equiv 0 \pmod{p},$$

welcher die Form w_0 für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ genügt, so wird die Untersuchung wesentlich schwieriger, aber ihr Resultat ist auch von viel grösserer Bedeutung. Offenbar genügt w_0 für *jede* Primzahl als Modul der Congruenz n-ten Grades

$$w^n + U^{(1)} w^{n-1} + \cdots + U^{(n)} \equiv 0 \pmod{p},$$

denn ihre linke Seite ist ja gleich Null, also durch jede Primzahl p theilbar. Es könnte aber leicht der Fall eintreten, dass dies für gewisse Primzahlen p nicht die Congruenz des niedrigsten Grades ist; wäre dies etwa für p der Fall, so würden u. A. *alle* ganzen algebraischen Zahlen von $(\mathfrak{G})$ modulo p betrachtet Congruenzen von niedrigerem als dem n-ten Grade genügen.

Die Lösung der Frage nach der niedrigsten Congruenz, welcher die Fundamentalform w_0 für eine beliebige Primzahl p als Modul genügt, ist

bis jetzt noch nicht gegeben worden. Ist sie gefunden, so ergeben sich unmittelbar eine Anzahl von fundamentalen Sätzen aus der Theorie der algebraischen Zahlen, welche in dieser und in einer folgenden Arbeit hergeleitet werden sollen und welche zu einem Theile noch garnicht, zu einem anderen nur unter Benutzung sehr ausgedehnter Hülfsuntersuchungen bewiesen worden sind.

§ 2.

Die im vorigen Abschnitte gestellte Aufgabe kann nicht auf einfache Weise gelöst werden, wenn man gleich von vornherein die Primzahl p selbst als Modul einführt. Im Allgemeinen verliert nämlich eine reelle Primzahl p innerhalb eines Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) die Eigenschaft der Unzerlegbarkeit, sie kann vielmehr als ein Product von nicht weiter zerlegbaren ganzen algebraischen Zahlen dargestellt werden; aber auch diese sind gewöhnlich nicht die einfachsten Elemente, was man am leichtesten aus dem Umstande erkennt, dass eine solche Zerfällung von p meistens auf mehr als eine Art möglich ist.

Nun hat *E. E. Kummer* für den Fall, dass die Gleichung für x eine Kreistheilungsgleichung ist, gezeigt, dass man jede Primzahl p auf eine und auch nur auf eine Weise in ein Product von sogenannten *idealen* Primfactoren zerlegen kann, so dass also:

$$p = P_1.P_2...P_t$$

ist, und dass diese Primfactoren P_i in der That für den Gattungsbereich ($\mathfrak{G}$) alle diejenigen Eigenschaften besitzen, welche den Primzahlen im Gebiete der reellen Zahlen zukommen. Auf dieser Grundlage fussend haben dann *L. Kronecker* und *R. Dedekind* den entsprechenden Nachweis für jeden beliebigen Gattungsbereich ($\mathfrak{G}$) geführt. Wie man diese Primfactoren definiren will, ob in geschlossener Form, als Linearformen mit unbestimmten Coefficienten, wie bei *Kronecker* oder, wie bei *Dedekind,* als die Gesammtheit von unendlich vielen bestimmt charakterisirten ganzen algebraischen Zahlen, ist für die vorliegende Untersuchung völlig gleichgültig. Es kommt hier nur darauf an, dass man erkennen kann, ob eine algebraische Zahl durch einen Primtheiler P_i theilbar ist, oder nicht, und diese Frage kann bei beiden Auffassungsarten leicht entschieden werden. Uebrigens wird gerade durch die folgende Untersuchung ein einfaches und naturgemässes

Verfahren gefunden werden, um die sämmtlichen Primfactoren von p in geschlossener Form wirklich darzustellen.

Es sei also wie vorher

$$p = P_1 P_2 \ldots P_l \tag{4.}$$

die Zerfällung der gegebenen Primzahl p in ihre unzerlegbaren algebraischen Primtheiler, welche zum Theil auch einander gleich sein können, und es möge irgend einer dieser l Factoren mit P bezeichnet werden. Es werde dann zuerst untersucht, welches die Congruenz niedrigsten Grades ist, der die Fundamentalform $w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$ für den Modul P genügt. Es sei nun

$$\Phi(w, u_1, \ldots, u_n) = V^{(\nu)}w^\nu + V^{(\nu-1)}w^{\nu-1} + \cdots + V^{(0)} \equiv 0 \pmod{P} \tag{5.}$$

irgend eine Congruenz modulo P, deren Wurzel die Fundamentalform w_0 für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ ist, d. h. es möge der Ausdruck Φ so gebildet sein, dass, nachdem man w durch w_0 ersetzt hat, die Function:

$$\Phi(w_0; u_1, \ldots, u_n) = \Phi(u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n; u_1, \ldots, u_n)$$

für *variable* $u_1, \ldots, u_n$ d. h. so durch P theilbar ist, dass der Coefficient jedes Potenzenproductes von $u_1, \ldots, u_n$ für sich jenen Primtheiler enthält.

Ist dies der Fall, so bleibt jener Ausdruck auch durch P theilbar, wenn man ihn zur p-ten Potenz erhebt, ihn nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelt und dann unter Benutzung der bekannten Congruenz:

$$(a+b+c+\cdots)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \cdots \pmod{p}$$

alle diejenigen Terme fortlässt, in denen keine p-ten Potenzen der Elemente $a, b, c, \ldots$ auftreten. Alsdann ergiebt sich aber die Congruenz:

$$\Phi(w_0, u_1, \ldots, u_n)^p \equiv \Phi(w_0^p; u_1^p, \ldots, u_n^p) \equiv \Phi(u_1^p\xi_1^p + \cdots + u_n^p\xi_n^p; u_1^p, \ldots, u_n^p) \pmod{p},$$

und diese Congruenz besteht natürlich a fortiori für den Primtheiler P von p. Es ist demnach auch der Ausdruck:

$$\Phi(u_1^p\xi_1^p + \cdots + u_n^p\xi_n^p; u_1^p, \ldots, u_n^p)$$

für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ durch P theilbar, und da diese Eigenschaft offenbar erhalten bleibt, wenn man $u_1^p, \ldots, u_n^p$ beziehlich durch $u_1, \ldots, u_n$ ersetzt, so erhält man, dass auch $\Phi(u_1\xi_1^p + \cdots + u_n\xi_n^p, u_1, \ldots, u_n)$ durch P theilbar ist, d. h. dass ausser der Fundamentalform w_0 auch die Linearform:

$$w_1 = u_1\xi_1^p + \cdots + u_n\xi_n^p$$

nothwendig eine Wurzel der Congruenz (5.) sein muss.

Schliesst man genau in derselben Weise weiter fort, so findet man, dass, falls w_0 der Congruenz (5.) genügt, auch alle unendlich vielen Linearformen:

$$(6.) \qquad w_\lambda = u_1 \xi_1^{p^\lambda} + u_2 \xi_2^{p^\lambda} + \cdots + u_n \xi_n^{p^\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ebenfalls Wurzeln derselben Congruenz sein müssen. Dieselben sind indessen nicht alle von einander verschieden. Da nämlich für den Modul p also a fortiori für den Primtheiler P von p nur eine endliche Anzahl verschiedener Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ existiren, so wird in der Reihe der unendlich vielen Linearformen (6.):

$$(6^a.) \qquad w_0, \quad w_1, \quad w_2, \quad \ldots$$

eine $w_\varkappa$ mit kleinstem Index $\varkappa$ existiren, für welche bei unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ $w_\varkappa \equiv w_0 \pmod{P}$, d. h.

$$(6^b.) \qquad u_1 \xi_1^{p^\varkappa} + \cdots + u_n \xi_n^{p^\varkappa} \equiv u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n \pmod{P}$$

ist, weil nämlich die n Congruenzen:

$$\xi_1^{p^\varkappa} \equiv \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_n^{p^\varkappa} \equiv \xi_n \pmod{P}$$

sämmtlich erfüllt sind. Dann zeigt man in sehr einfacher und bekannter Weise, dass die $\varkappa$ Linearformen:

$$\begin{aligned} w_0 &= u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \cdots + u_n \xi_n, \\ w_1 &= u_1 \xi_1^p + u_2 \xi_2^p + \cdots + u_n \xi_n^p, \\ w_{\varkappa-1} &= u_1 \xi_1^{p^{\varkappa-1}} + u_2 \xi_2^{p^{\varkappa-1}} + \cdots + u_n \xi_n^{p^{\varkappa-1}} \end{aligned}$$

für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ sämmtlich für den Modul P incongruent sind, und dass jede andere Form w_λ einer von diesen congruent sein muss, dass nämlich allgemein

$$w_{\lambda+\varkappa} \equiv w_\lambda \pmod{P}$$

ist.

Genügt also w_0 einer Congruenz $\Phi(w) \equiv 0$ für den Modul P, so sind auch $w_0, w_1, \ldots, w_{\varkappa-1}$ Wurzeln derselben. Da aber P innerhalb $(\mathfrak{G})$ ein Primdivisor ist, so gilt auch hier der Satz, dass $\Phi(w)$ durch $w - w_i$ theilbar ist, falls w_i eine Congruenzwurzel von $\Phi(w)$ ist. Da also $w_0, \ldots, w_{\varkappa-1}$ sämmtlich von einander verschieden sind, so ergiebt sich, dass w_0 dann und nur dann eine Wurzel von $\Phi(w) \equiv 0$ ist, wenn die Congruenz besteht:

$$\Phi(w) \equiv (w - w_0)(w - w_1) \ldots (w - w_{\varkappa-1}) \Psi(w) \pmod{P},$$

wo $\Psi(w)$ ebenfalls eine *ganze* Function von $(w, u_1, \ldots, u_n)$ mit ganzen algebraischen Coefficienten ist.

Die Function $\varkappa$-ten Grades

$$\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n) = (w-w_0)(w-w_1)\ldots(w-w_{\varkappa-1})$$

ist nun modulo P betrachtet einer ganzen Function von $w, u_1, \ldots, u_n$ congruent, deren Coefficienten *reelle* ganze Zahlen sind. Erhebt man nämlich diese Function zur p-ten Potenz und lässt wiederum alle durch p theilbaren Binomialcoefficienten fort, so geht der Ausdruck für $\mathfrak{F}$ über in:

$$(\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n))^p \equiv (w^p-w_0^p)\ldots(w^p-w_{\varkappa-1}^p) \pmod{P},$$

und wenn man beachtet, dass die Potenzen

$$w_0^p, \quad w_1^p, \quad \ldots, \quad w_{\varkappa-1}^p$$

modulo P beziehlich mit

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_0$$

übereinstimmen, wenn man überall die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ durch $u_1^p, \ldots, u_n^p$ ersetzt, so ergiebt sich, dass $\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n)$ für unbestimmte $w, u_1, \ldots, u_n$ der Congruenz genügt:

$$(\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n))^p \equiv \mathfrak{F}(w^p, u_1^p, \ldots, u_n^p) \pmod{P}.$$

Hieraus folgt aber durch Coefficientenvergleichung auf beiden Seiten dieser Congruenz, dass jeder Coefficient a irgend eines Potenzenproductes von $w, u_1, \ldots, u_n$ in der Entwickelung von $\mathfrak{F}$ der Congruenz genügt:

$$a^p-a \equiv 0 \pmod{P},$$

und hieraus endlich, dass jeder dieser Coefficienten einer realen ganzen Zahl congruent ist, dass also die Coefficienten von

$$\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n) = (w-w_0)\ldots(w-w_{\varkappa-1}) = w^\varkappa + U_1 w^{\varkappa-1} + \cdots + U_\varkappa$$

lauter homogene Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ mit realen ganzzahligen Coefficienten sind. Der Einfachheit wegen möge von vorn herein angenommen werden, dass alle jene Coefficienten von $\mathfrak{F}(w)$ modulo p auf ihren kleinsten positiven Rest reducirt sind; dann ist also $\mathfrak{F}(w)$ eine eindeutig bestimmte ganze ganzzahlige Function von $w, u_1, \ldots, u_n$ mit realen ganzzahligen Coefficienten, und es ist w_0 dann und nur dann eine Wurzel von $\Phi(w)$ für den Modul P, wenn $\Phi(w)$ der Congruenz genügt:

$$\Phi(w) \equiv \mathfrak{F}(w)\Psi(w) \pmod{P},$$

wo offenbar auch die Function $\Psi(w)$ reale Zahlencoefficienten besitzen muss, da dasselbe für $\Phi(w)$ und für $\mathfrak{F}(w)$ der Fall ist. Alsdann besteht aber

diese Congruenz auch für die Primzahl p selbst, wenn sie für den Primdivisor P erfüllt ist; man erhält somit den wichtigen Satz:

Die Fundamentalform w_0 genügt dann und nur dann einer Congruenz

$$\Phi(w) \equiv 0 \pmod{P},$$

wenn ihre linke Seite modulo p betrachtet durch die ganzzahlige Function $\varkappa$-ten Grades

$$\mathfrak{F}(w) = (w-w_0)(w-w_1)\dots(w-w_{\varkappa-1})$$

theilbar ist, d. h. wenn die Congruenz besteht

$$\Phi(w) \equiv \mathfrak{F}(w)\Psi(w) \pmod{p}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar als Corollar:

Die Congruenz niedrigsten Grades, der die Fundamentalform w_0 modulo P genügt, ist

$$\mathfrak{F}(w) \equiv 0 \pmod{P}$$

und ihre linke Seite ist für unbestimmte $u_1, \dots, u_n$ modulo p betrachtet irreductibel.

Zerfiele nämlich $\mathfrak{F}$ in zwei Factoren $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ von niedrigerem als dem $\varkappa$-ten Grade, so müsste mindestens einer von ihnen für $w = w_0$ durch P theilbar werden, während $\mathfrak{F}(w)$ die Function niedrigsten Grades ist, welche für $w = w_0$ verschwindet.

Die Zahl $\varkappa$, welche den Grad der niedrigsten Congruenz für w_0 modulo P angiebt, hat für diesen Divisor eine charakteristische Bedeutung; sie soll die ***Ordnungszahl*** desselben genannt werden. Es ist leicht, eine andere Bedeutung dieser Zahl zu finden, welche für das Folgende von Wichtigkeit ist. Beachtet man zunächst, dass für beliebige ganzzahlige Werthe von $u_1, \dots, u_n$

$$w_\varkappa = u_1\xi_1^{p^\varkappa} + \dots + u_n\xi_n^{p^\varkappa} \equiv (u_1\xi_1 + \dots + u_n\xi_n)^{p^\varkappa} \equiv w_0^{p^\varkappa} \pmod{P}$$

ist, so folgt aus der Congruenz $w_\varkappa \equiv w_0 \pmod{P}$ unmittelbar, dass jede ganze algebraische Zahl

$$\xi = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$$

des Bereiches $(\mathfrak{G})$ der Congruenz genügt:

$$\xi^{p^\varkappa} - \xi \equiv 0 \pmod{P}$$

und ferner, dass keine Congruenz:

$$\xi^{p^{\bar{\varkappa}}} - \xi \equiv 0 \pmod{P}$$

für $\bar{\varkappa} < \varkappa$ existirt, der *alle* Grössen des Bereiches genügen, da sonst schon $w_{\bar{\varkappa}} \equiv w_0$ sein müsste.

Um nun die zweite Bedeutung der Ordnungszahl $\varkappa$ herzuleiten, bilden wir die beliebig weit fortzusetzende Matrix

$$(7.) \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \cdots & \xi_n^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{p^\lambda} & \xi_2^{p^\lambda} & \cdots & \xi_n^{p^\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

und betrachten sie für den Primdivisor P. Für ihn sind nur die ersten $\varkappa$ Zeilen derselben von einander verschieden, da die Elemente der $(\varkappa+1)$-ten Zeile $\xi_1^{p^\varkappa} \ldots \xi_n^{p^\varkappa}$ denen der ersten, die der $(\varkappa+2)$-ten denen der zweiten etc. congruent sind. Hieraus folgt, dass alle Determinanten der $(\varkappa+1)$-ten oder einer höheren Ordnung von (7.) durch P theilbar sind, da in jeder von ihnen mindestens zwei Zeilen einander für diesen Modul congruent sind. Jenes System, wie weit man es auch fortsetzen möge, ist also modulo P betrachtet höchstens vom Range $\varkappa$. Andererseits kann man aber zeigen, dass mindestens eine Determinante $\varkappa$-ter Ordnung dieses Systems durch P nicht theilbar ist, d. h. dass dasselbe genau vom Range $\varkappa$ modulo P ist. In der That wären alle Determinanten $\varkappa$-ter Ordnung des Systemes von $\varkappa$ Zeilen:

$$(7^a.) \qquad \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \cdots & \xi_n^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{p^{\varkappa-1}} & \xi_2^{p^{\varkappa-1}} & \cdots & \xi_n^{p^{\varkappa-1}} \end{pmatrix}$$

durch P theilbar, so könnte man $\varkappa$ nicht sämmtlich durch P theilbare algebraische Zahlen $A_0, A_1, \ldots, A_{\varkappa-1}$ so finden, dass für alle n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Congruenz bestände:

$$(7^b.) \qquad A_0\xi_i + A_1\xi_i^p + \cdots + A_{\varkappa-1}\xi_i^{p^{\varkappa-1}} \equiv 0 \pmod{P} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist dann W_0 irgend eine ganze Grösse des Bereiches, also

$$(7^c.) \qquad W_0 = U_1\xi_1 + \cdots + U_n\xi_n,$$

wo $U_1, \ldots, U_n$ ganze Zahlen oder auch ganzzahlige Formen von $u_1, \ldots, u_n$ sein können, und setzt man wieder

$$(7^c.) \qquad \begin{cases} W_1 = U_1\xi_1^p + \cdots + U_n\xi_n^p, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ W_{\varkappa-1} = U_1\xi_1^{p^{\varkappa-1}} + \cdots + U_n\xi_n^{p^{\varkappa-1}}, \end{cases}$$

so ergiebt sich, wenn man jene $\varkappa$ Gleichungen (7^c.) beziehlich mit A_0, A_1, ..., $A_{\varkappa-1}$ multiplicirt und addirt, aus dem Bestehen von (7^b.) unmittelbar:

(7^d.) $$A_0W_0+A_1W_1+\cdots+A_{\varkappa-1}W_{\varkappa-1} \equiv 0 \pmod{P}.$$

Setzt man nun an Stelle von $W_0, \ldots, W_{\varkappa-1}$ beziehlich: $w_0^h, w_1^h, \ldots, w_{\varkappa-1}^h$, wo h successive gleich einer jeden der $\varkappa$ Zahlen $0, 1, \ldots, \varkappa-1$ angenommen wird, so würde man aus (7^d.) die folgenden $\varkappa$ Congruenzen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} A_0 \quad &+A_1 \quad &+\cdots+A_{\varkappa-1} &\equiv 0 \\ A_0w_0 \quad &+A_1w_1 \quad &+\cdots+A_{\varkappa-1}w_{\varkappa-1} &\equiv 0 \\ &\vdots \\ A_0w_0^{\varkappa-1} &+A_1w_1^{\varkappa-1} &+\cdots+A_{\varkappa-1}w_{\varkappa-1}^{\varkappa-1} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{P}.$$

Diese $\varkappa$ Congruenzen könnten aber nur dann zusammen bestehen, ohne dass alle $\varkappa$ Zahlen $A_0, \ldots, A_{\varkappa-1}$ den Divisor P enthalten, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_0 & w_1 & \ldots & w_{\varkappa-1} \\ \vdots & & & \\ w_0^{\varkappa-1} & w_1^{\varkappa-1} & \ldots & w_{\varkappa-1}^{\varkappa-1} \end{vmatrix} = \prod_{h<i}(w_h-w_i)$$

derselben für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ durch P theilbar wäre; da aber die $\varkappa$ Formen $w_0, \ldots, w_{\varkappa-1}$ modulo P sämmtlich von einander verschieden sind, so ist die oben gemachte Annahme unstatthaft, und man erhält den Satz:

Der Rang der beliebig weit fortgesetzten Matrix:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \xi_1^p \ldots \xi_n^p \\ \ldots \end{pmatrix}$$

modulo P ist genau gleich der Ordnungszahl $\varkappa$ dieses Divisors.

Es sei nun der Einfachheit wegen die Bezeichnung der Elemente des Fundamentalsystems so gewählt, dass die erste Determinante $\varkappa$-ter Ordnung jener Matrix:

(8.) $$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots \xi_\varkappa \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \ldots \xi_\varkappa^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_1^{p^{\varkappa-1}} & \xi_2^{p^{\varkappa-1}} & \ldots \xi_\varkappa^{p^{\varkappa-1}} \end{vmatrix}$$

durch P nicht theilbar ist. Dann bilden die $\varkappa$ Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_\varkappa$ für den Divisor P in der Weise ein Fundamentalsystem, dass jede Zahl ξ des Be-

reiches modulo P betrachtet auf eine und nur auf eine Weise in der Form $u_1\xi_1+\cdots+u_\varkappa\xi_\varkappa$ dargestellt werden kann. Denn aus den $\varkappa$ Congruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &\equiv u_1\xi_1 &&+\cdots+u_\varkappa\xi_\varkappa \\ \xi^p &\equiv u_1\xi_1^p &&+\cdots+u_\varkappa\xi_\varkappa^p \\ &\vdots \\ \xi^{p^{\varkappa-1}} &\equiv u_1\xi_1^{p^{\varkappa-1}} &&+\cdots+u_\varkappa\xi_\varkappa^{p^{\varkappa-1}} \end{aligned}\right\} \pmod{P}$$

bestimmen sich einmal $u_1, \ldots, u_\varkappa$ eindeutig, weil die Determinante Δ den Divisor P nicht enthält; dann aber sind die so bestimmten $u_1, \ldots, u_\varkappa$ auch reellen ganzen Zahlen congruent, denn wenn man die Congruenzen zur p-ten Potenz erhebt und die Vielfachen von p fortlässt, erhält man genau dieselben Congruenzen für $u_1^p, \ldots, u_\varkappa^p$ wie vorher für $u_1, \ldots, u_\varkappa$, und hieraus ergiebt sich, dass alle Coefficienten modulo P realen ganzen Zahlen congruent sind.

Also erhält man alle modulo P incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊), wenn man in der Form

$$u_1\xi_1+\cdots+u_\varkappa\xi_\varkappa$$

für $u_1, \ldots, u_\varkappa$ alle Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ setzt, und hieraus folgt unmittelbar der Satz:

> Die Anzahl aller modulo P incongruenten ganzen algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊) ist gleich $p^\varkappa$, wenn $\varkappa$ die Ordnungszahl des Primdivisors P bedeutet.

§ 3.

Nachdem im vorigen Abschnitte die Congruenz niedrigsten Grades $\mathfrak{F}(w) \equiv 0$ gefunden ist, der die Fundamentalform w_0 für einen Primdivisor P als Modul genügt, soll jetzt nachgewiesen werden, dass der Ausdruck: $\mathfrak{F}(w_0)$ äquivalent dem Primdivisor P ist, d. h. dass jene algebraische Form von $u_1, \ldots, u_n$ den Divisor P nur einmal, und ausserdem keinen anderen Divisor P' von p enthält. Angenommen nun, $\mathfrak{F}(w_0)$ enthielte für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ den Divisor P nicht bloss einmal, sondern mehrere Male, es sei also $\mathfrak{F}(w_0)$ durch P^2 theilbar, so müsste dies auch der Fall sein, wenn man über $u_1, \ldots, u_n$ bestimmte Annahmen macht. Es sei nun

$$\pi_0 = a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n$$

eine Zahl, welche zwar durch P, nicht aber durch P^2 theilbar ist; eine solche muss es in dem Gattungsbereiche (𝔊) offenbar geben. Betrachten wir dann

die Congruenz, der die Function:

$$w_0+\pi_0 = (u_1+a_1)\xi_1+\cdots+(u_n+a_n)\xi_n$$

modulo P betrachtet genügt, so geht diese aus $\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n)$ hervor, wenn man dort allgemein u_i ersetzt durch (u_i+a_i) und dann alle ganzzahligen Vielfachen von p fortlässt; da aber die z Formen

$$w_0+\pi_0, \quad w_1+\pi_1, \quad \ldots, \quad w_{z-1}+\pi_{z-1}, \quad \text{beziehlich} \quad w_0, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_{z-1}$$

modulo P betrachtet congruent sind, so gilt dasselbe auch von ihren elementaren symmetrischen Functionen, und auch, und zwar für den Modul p selbst, von den Coefficienten der Functionen:

$$\mathfrak{F}(w;\ u_1+a_1, \ldots, u_n+a_n) \quad \text{und} \quad F(w, u_1, \ldots, u_n).$$

Da endlich in jenen Ausdrücken alle Multipla von p fortgelassen sind, so sind die entsprechenden Coefficienten in beiden Functionen einander gleich, d. h. auch $(w_0+\pi_0)$ genügt der Congruenz $\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$. Wäre nun der Ausdruck $\mathfrak{F}(w_0)$ stets durch P^2 theilbar, so müsste sonach auch $\mathfrak{F}(w_0+\pi_0)$ ebenfalls diesen Divisor enthalten, d. h. es wäre:

$$\mathfrak{F}(w_0+\pi_0) = \mathfrak{F}(w_0)+\pi_0\mathfrak{F}'(w_0)+\pi_0^2\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''(w_0)+\cdots \equiv 0 \pmod{P},$$

und da hier nach der über $\mathfrak{F}(w_0)$ und über π_0 gemachten Voraussetzung alle Terme mit Ausnahme des zweiten den Theiler P enthalten, so müsste dasselbe auch von diesem gelten, d. h. es müsste die Congruenz bestehen:

$$\mathfrak{F}'(w_0) \equiv (w_0-w_1)(w_0-w_2)\ldots(w_0-w_{z-1}) \equiv 0 \pmod{P},$$

und dies ist, wie oben angegeben, für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ nicht der Fall.

Ebenso leicht kann man nachweisen, dass $\mathfrak{F}(w_0)$ auch keinen von P verschiedenen Primtheiler P' von P enthält, solange $u_1, \ldots, u_n$ unbestimmt bleiben. Zu diesem Zwecke setzen wir speciell $w_0 = \pi$, wo π eine algebraische Zahl ist, die den Divisor P enthält, dagegen P' nicht; auch eine solche Zahl muss ja nothwendig innerhalb (𝔊) existiren. Dann sind w_0, also auch $w_1, \ldots, w_{z-1}$ alle durch P theilbar, es wird daher in diesem Falle:

$$\mathfrak{F}(w) \equiv (w-w_0)(w-w_1)\ldots(w-w_{z-1}) \equiv w^z \pmod{P}$$

d. h. es wird $\mathfrak{F}(\pi) = \pi^z$ und diese Zahl ist n. d. V. durch P nicht theilbar. Damit ist der im Anfange dieses Abschnittes aufgestellte Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Bildet man also die Form:

$$p+\mathfrak{F}(w_0),$$

so enthält diese einmal und nur einmal den Divisor P und keinen anderen

Primdivisor, denn wenn dieselbe überhaupt einen Divisor enthalten sollte, so müsste derselbe in p aufgehen, also einer der Divisoren P' sein, und dieser ist nicht in $\mathfrak{F}(w_0)$ enthalten, falls er von P verschieden ist. Man hat also das Resultat:

Ist

$$\mathfrak{F}(w) \equiv 0 \pmod{P}$$

die Congruenz niedrigsten Grades, der die Fundamentalform w_0 genügt, so ist

$$P \backsim p + F(w_0).$$

Es seien nun P und P' zwei gleiche oder von einander verschiedene Primtheiler von P, welche jedoch so gewählt sein sollen, dass das Product PP' noch in der Primzahl p enthalten ist, und es seien $\mathfrak{F}(w)$ und $\mathfrak{F}_1(w)$ die Ausdrücke niedrigsten Grades, denen die Fundamentalform w_0 modulo P und modulo P' genügt. Es soll untersucht werden, welcher Congruenz w_0 für das Product (PP') als Modul genügt. Es sei nun

$$\Phi(w_0) \equiv 0 \pmod{PP'},$$

dann besteht auch a fortiori die Congruenz:

$$\Phi(w_0) \equiv 0 \pmod{P},$$

und dies findet dann und nur dann statt, wenn

$$\Phi(w) \equiv \mathfrak{F}(w)\Psi(w) \pmod{p},$$

also a fortiori

$$\Phi(w) \equiv \mathfrak{F}(w)\Psi(w) \pmod{PP'}$$

ist. Ersetzt man aber hier w durch w_0, so muss sein:

$$\mathfrak{F}(w_0)\Psi(w_0) \equiv 0 \pmod{PP'}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{F}(w_0)}{P} \cdot \Psi(w_0) \equiv 0 \pmod{P'},$$

und da der erste Factor überhaupt keinen Theiler von P mehr enthält, so muss $\Psi(w_0)$ durch P' theilbar sein, d. h. es muss w_0 der Congruenz

$$\Psi(w_0) \equiv 0 \pmod{P'}$$

genügen, und dies findet dann und nur dann statt, wenn

$$\Psi(w) \equiv \mathfrak{F}_1(w)\Phi_1(w) \pmod{p}$$

ist. Hieraus ergiebt sich also der Satz:

Die Fundamentalform w_0 genügt dann und nur dann der Congruenz:

$$\Phi(w_0) \equiv 0 \pmod{PP'},$$

wenn die Congruenz:

$$\Phi(w) \equiv \mathfrak{F}(w)\mathfrak{F}_1(w)\Phi_1(w) \pmod{p}$$

besteht, wenn also $\Phi(w)$ modulo p betrachtet durch das Product $\mathfrak{F}(w)\mathfrak{F}_1(w)$ theilbar ist.

Hieraus folgt sofort als Corollar der Satz:

Die Fundamentalform w_0 genügt für den zusammengesetzten Modul PP' der Congruenz niedersten Grades

$$\mathfrak{F}(w_0)\mathfrak{F}_1(w_0) \equiv 0 \pmod{PP'};$$

ihr Grad ist also gleich $(\varkappa+\varkappa')$ d. h. gleich der Summe der Ordnungszahlen von P und P'.

Wir wollen auch hier die Zahl $(\varkappa+\varkappa')$ die Ordnungszahl des Divisorenproductes (PP') nennen. Bekanntlich ist die Anzahl der modulo (PP') incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches gleich $p^{\varkappa+\varkappa'}$, wenn dieselbe für P und P' beziehlich gleich $p^{\varkappa}$ und $p^{\varkappa'}$ ist. Die vorhin gefundene zweite Bedeutung der Ordnungszahl gilt also nicht bloss für einen Primdivisor von p, sondern ganz ebenso für ein Product von zwei solchen Divisoren, und hieraus folgt ohne Weiteres ihr Bestehen für einen aus beliebig vielen Primdivisoren bestehenden Theiler $\overline{P}$ von p.

In derselben Weise kann man nun fortfahren, indem man die niedrigste Congruenz aufsucht, welcher die Fundamentalform für ein Product von drei und mehr Primdivisoren genügt. So erhält man den folgenden allgemeinen Satz:

Ist $\overline{P}$ irgend ein zerlegbarer oder unzerlegbarer Divisor der Primzahl p, so genügt die Fundamentalform w_0 modulo $\overline{P}$ betrachtet einer Congruenz des niedrigsten Grades:

$$\overline{\mathfrak{F}}(w) \equiv 0 \pmod{\overline{P}};$$

der Grad derselben ist auch hier gleich der Ordnungszahl $\overline{\varkappa}$ des Divisors $\overline{P}$, d. h. die Anzahl der modulo $\overline{P}$ incongruenten ganzen Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$ ist gleich $p^{\overline{\varkappa}}$. Eine Function $\Phi(w)$ ist dann und nur dann für $w = w_0$ durch $\overline{P}$ theilbar, wenn $\Phi(w)$ modulo p betrachtet durch $\overline{\mathfrak{F}}(w)$ theilbar ist.

Die Congruenz niedrigsten Grades, der w_0 für den Divisor $\overline{P}$ genügt, setzt sich aber aus denen für die Primfactoren von $\overline{P}$ in einfachster Weise zusammen. In der That, ist

$$\overline{P} = P_1 P_2 \ldots P_i$$

die Zerlegung von $\overline{P}$ in seine Primfactoren und sind

$$\mathfrak{F}_1(w), \quad \mathfrak{F}_2(w), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_i(w),$$

die Functionen niedrigsten Grades, denen w_0 für jene i Primfactoren genügt, so bestimmt sich die Function niedrigsten Grades $\overline{\mathfrak{F}}(w)$, deren Wurzel w_0 modulo $\overline{P}$ ist, ähnlich wie vorher aus der Gleichung:

$$\overline{\mathfrak{F}}(w) = \mathfrak{F}_1(w).\mathfrak{F}_2(w)\ldots\mathfrak{F}_i(w).$$

Wendet man den soeben gefundenen allgemeinen Satz auf den Fall an, dass der Divisor $\overline{P}$ von p mit p selbst zusammenfällt, und beachtet man dabei, dass die Anzahl der modulo p incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ gleich p^n, d. h. dass die Ordnungszahl von p selbst gleich n ist, so ergiebt sich der Fundamentalsatz:

Die niedrigste Congruenz, der die Fundamentalform w_0 modulo p betrachtet genügt, ist vom n-ten Grade, es giebt also keine Primzahl p, für welche die niedrigste Congruenz für die Fundamentalform von niedrigerem Grade wäre, als der der Fundamentalgleichung ist.

Es sei nun

$$p = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \ldots P_h^{\delta_h}$$

die Zerlegung der reellen Primzahl p in ihre Primdivisoren innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G})$, und zwar mögen jetzt bereits die gleichen Divisoren zu einer Potenz vereinigt, die h Divisoren $P_1, \ldots, P_h$ also als von einander verschieden angenommen werden. Ferner seien:

$$\mathfrak{F}_1(w), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_h(w)$$

die modulo p irreductiblen Functionen niedrigsten Grades, deren Congruenzwurzel die Fundamentalform w_0 beziehlich für die Divisoren $P_1, \ldots, P_h$ ist; ihr Grad in w werde resp. durch

$$z_1, \quad \ldots, \quad z_h$$

bezeichnet. Dann ist die Function niedrigsten Grades $\mathfrak{F}(w)$, der w_0 modulo p

betrachtet genügt, gegeben durch die Gleichung:

$$\mathfrak{F}(w) = \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w),$$

und da ihr Grad gleich n ist, so ergiebt sich durch Vergleichung der Gradzahlen auf beiden Seiten dieser Gleichung die wichtige Relation:

$$n = \varkappa_1\delta_1+\varkappa_2\delta_2+\dots+\varkappa_h\delta_h.$$

Jede andere ganze ganzzahlige Function, deren Congruenzwurzel modulo p die Form w_0 ist, muss für diesen Modul durch $\mathfrak{F}(w)$ theilbar sein. Diese einfache Bemerkung liefert nun ein Mittel, die h Functionen $\mathfrak{F}_1(w)\dots\mathfrak{F}_h(w)$ direct zu finden und damit auch jede Primzahl p innerhalb $(\mathfrak{G})$ in ihre Primdivisoren zu zerlegen. Betrachtet man nämlich die Fundamentalgleichung $F(w, u_1, \dots, u_n)$ selbst, so wird sie als Congruenz für jede Primzahl p betrachtet durch $w = w_0$ befriedigt, weil sie ja dann identisch verschwindet; also muss die linke Seite der Fundamentalgleichung $\mathfrak{F}(w)$ modulo p betrachtet durch $\mathfrak{F}(w)$ theilbar sein. Da aber der Grad beider Functionen derselbe ist, nämlich gleich n, und da ferner der Coefficient von w^n in ihnen ebenfalls übereinstimmt, so ist $F(w)$ modulo p congruent $\mathfrak{F}(w)$; und so gelangt man zu der fundamentalen Congruenz:

$$F(w) \equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\mathfrak{F}_2^{\delta_2}(w)\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w) \pmod{p},$$

oder was dasselbe ist zu der Gleichung:

$$F(w) = \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w)+p\overline{F}(w).$$

Da die Functionen $\mathfrak{F}_1(w), \dots, \mathfrak{F}_h(w)$ modulo p betrachtet irreductibel und von einander verschieden sind, so ist die rechte Seite der obigen Congruenz nichts anderes als die Zerlegung der linken Seite der Fundamentalgleichung in ihre modulo p irreductiblen Factoren, eine Zerlegung, welche modulo p betrachtet eine vollkommen eindeutige und bestimmte ist und in jedem Falle direct ausgeführt werden kann. Da aber andererseits $\mathfrak{F}_1(w_0), \dots, \mathfrak{F}_h(w_0)$ den verschiedenen Primdivisoren von p innerhalb $(\mathfrak{G})$ äquivalent sind, so ergiebt sich die folgende einfache Vorschrift, um die Primfactoren einer beliebigen Primzahl p innerhalb eines beliebigen Gattungsbereiches direct zu finden: Um die Primfactoren einer Primzahl p innerhalb eines Bereiches $(\mathfrak{G})$ zu bestimmen, zerlege man die Fundamentalgleichung $F(w)$ derselben modulo p in ihre irreductiblen Factoren; ist dann

$$F(w) \equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w) \pmod{p},$$

so ist

$$p \sim (p+\mathfrak{F}_1(w_0))^{\delta_1}\dots(p+\mathfrak{F}_h(w_0))^{\delta_h}$$

die Zerlegung von p in seine Primfactoren. Sind ferner $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h$ die Grade von $\mathfrak{F}_1(w), \ldots, \mathfrak{F}_h(w)$, so sind diese gleichzeitig die Ordnungszahlen der einzelnen von einander verschiedenen Primdivisoren, d. h. es ist allgemein $p^{\varkappa_i}$ die Anzahl der modulo P_i incongruenten ganzen algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$.

Dieses wichtige Resultat ist, jedoch nicht vollständig, von *Leopold Kronecker* in seiner Festschrift § 25 abgeleitet worden. Der a. a. O. benutzten Beweismethode entzogen sich nämlich, wie *Kronecker* selbst hervorhebt, jedesmal eine beträchtlich grosse Anzahl von Primzahlen, nämlich alle die, welche in dem Producte:

$$1.2.3\ldots(n-2)$$

enthalten sind, wenn n die Ordnung der Gattung bedeutet, und diese keine *Galois*sche Gattung ist. Dagegen ist a. a. O. derselbe Satz für beliebige Rationalitätsbereiche hergeleitet worden unter der Voraussetzung, dass p eine beliebige irreductible Function der auftretenden Variablen ist. Diese Erweiterung des Satzes ist hier nicht gegeben worden, um die Einfachheit der Herleitung deutlicher erkennen zu lassen; es ist sehr leicht, den Satz auf diesem Wege für einen beliebigen Rationalitätsbereich zu beweisen, wie in einer späteren Arbeit dargelegt werden soll.

§ 4.

Der Satz, dass die Fundamentalform w_0 für jede Primzahl p keiner Congruenz von niedrigerem als dem n-ten Grade genügt, soll nun benutzt werden, um ein weiteres wichtiges Resultat aus der Theorie der algebraischen Zahlen herzuleiten, welches ebenfalls bis jetzt noch nicht vollständig bewiesen worden ist.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir für den Augenblick die n zu der Fundamentalform w_0 conjugirten Formen beziehungsweise durch:

$$w_0, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_{n-1},$$

und die vorher $\xi_1, \ldots, \xi_n$ genannten Elemente des Fundamentalsystemes nebst ihren Conjugirten beziehlich durch:

$$\begin{array}{llll} \xi_1^{(0)}, & \xi_2^{(0)}, & \ldots, & \xi_n^{(0)}, \\ \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)}, & \ldots, & \xi_n^{(1)}, \\ \vdots & & & \\ \xi_1^{(n-1)}, & \xi_2^{(n-1)}, & \ldots, & \xi_n^{(n-1)}. \end{array}$$

Das Quadrat der aus den n^2 Grössen $\xi_h^{(i)}$ gebildeten Determinante

$$D = |\xi_h^{(i)}|^2$$

ist dann eine reelle ganze Zahl, welche die *Discriminante der Gattung* (𝔊) genannt wird, und deren Kenntniss von fundamentaler Bedeutung für die Untersuchung der Gattung ist. Bezeichnet man nun die Discriminante der Fundamentalgleichung $F(w) = 0$ d. h. das Determinantenquadrat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ w_0 & w_1 & \dots w_{n-1} \\ \vdots & & \\ w_0^{n-1} & w_1^{n-1} & \dots w_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

durch $\mathfrak{D}(u_1, \dots, u_n)$, so wird $\mathfrak{D}$ für unbestimmte $u_1, \dots, u_n$ eine homogene Form von $u_1, \dots, u_n$ mit reellen ganzzahligen Coefficienten, und eine einfache Ueberlegung lehrt, dass die Form $\mathfrak{D}(u_1, \dots, u_n)$ für unbestimmte $u_1, \dots, u_n$ durch die Gattungsdiscriminante D theilbar ist und dass $\mathfrak{D}(u_1, \dots, u_n)$ ausser der ganzen Zahl D keinen einzigen anderen Zahlenfactor enthält. Da nämlich $1, w_0, w_0^2, \dots, w_0^{n-1}$ ganze Formen des Bereiches (𝔊) sind, so bestehen n Gleichungen von der Form:

$$(9.) \qquad \begin{cases} 1 = U_{01}\xi_1^{(0)} + \dots + U_{0n}\xi_n^{(0)}, \\ w_0 = U_{11}\xi_1^{(0)} + \dots + U_{1n}\xi_n^{(0)}, \\ \vdots \\ w_0^{n-1} = U_{n-1,1}\xi_1^{(0)} + \dots + U_{n-1,n}\xi_n^{(0)}, \end{cases}$$

wo die Coefficienten (U_{ik}) ganze Zahlen bzw. ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \dots, u_n$ sind. Bildet man die Determinante dieser n^2 Grössen

$$(9^a.) \qquad \Delta(u_1, \dots, u_n) = |U_{ik}|,$$

so wird diese ebenfalls eine ganze homogene Function von $u_1, \dots, u_n$ mit ganzzahligen Coefficienten, und man erkennt leicht, dass sie in der Weise primitiv ist, dass ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Wäre nämlich $\Delta(u_1, \dots, u_1)$ durch irgend eine Primzahl p für unbestimmte $u_1, \dots, u_n$ theilbar, so könnte man in (9.) n nicht sämmtlich durch p theilbare ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \dots, u_n$

$$V^{(0)}, \quad V^{(1)}, \quad \dots, \quad V^{(n-1)}$$

so finden, dass, wenn man die erste Gleichung mit $V^{(0)}$, die zweite mit $V^{(1)}$, ... die letzte mit $V^{(n-1)}$ multiplicirt und sie alle zu einander addirt, auf der rechten Seite der so erhaltenen Congruenz alle Coefficienten durch p theilbar sind, d. h. man erhielte das Resultat, dass w_0 einer ganzzahligen

Congruenz

$$V^{(0)}+V^{(1)}w_0+V^{(2)}w_0^2+\cdots+V^{(n-1)}w_0^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

von niedrigerem als dem n-ten Grade genügt, was, wie oben nachgewiesen wurde, niemals der Fall ist, wie auch die Primzahl p ausgewählt werde. Die Substitutionsdeterminante $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = |U_{ik}|$ besitzt also für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ keinen einzigen Zahlenfactor.

Schreibt man nun aber die den Gleichungen (9.) entsprechenden Systeme für die n zu (𝔊) conjugirten Gattungen, und beachtet, dass die reellen ganzzahligen Coefficienten U_{ik} bei diesem Uebergange ungeändert bleiben, so erhält man die n^2 Gleichungen:

$$(9^a.) \qquad \begin{cases} 1 &= U_{01}\ \xi_1^{(h)}+\cdots+U_{0n}\ \xi_n^{(h)}, \\ w_h &= U_{11}\ \xi_1^{(h)}+\cdots+U_{1n}\ \xi_n^{(h)}, \\ \vdots & \\ w_h^{n-1} &= U_{n-1,1}\xi_1^{(h)}+\cdots+U_{n-1,n}\xi_n^{(h)}, \end{cases} \qquad (h=0, \ldots, n-1),$$

und hieraus ergiebt sich mit Hülfe des Multiplicationssatzes für Determinanten:

$$|w_0^h \ldots w_{n-1}^h| = |U_{h1} \ldots U_{hn}||\xi_1^{(h)} \ldots \xi_n^{(h)}| \qquad (h=0, 1, \ldots, n-1),$$

oder, wenn man beiderseits zum Quadrate erhebt und die Bedeutung der so sich ergebenden Ausdrücke beachtet:

$$\mathfrak{D}(u_1, \ldots, u_n) = D.\Delta^2(u_1, \ldots, u_n),$$

Es ist also die Discriminante $\mathfrak{D}(u_1, \ldots, u_n)$ der Fundamentalgleichung durch die Gattungsdiscriminante D theilbar, und, was besonders hervorzuheben, die erstere besitzt ausser der Gattungsdiscriminante keinen einzigen Zahlentheiler, weil Δ^2 keine Primzahl p als Factor enthält. Man kann daher den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

> Für eine beliebige Gattung (𝔊) ist die Discriminante der Fundamentalgleichung der Gattungsdiscriminante absolut äquivalent d. h. beide besitzen genau dieselben Zahlentheiler.

Auch bei diesem Satze muss *Kronecker* diejenigen Zahlen ausschliessen, welche in dem Producte $1.2.3 \ldots n-2$ enthalten sind, und fügt dann hinzu:

> „Ob in Wirklichkeit solche überflüssigen Zahlentheiler in der Discriminante der Fundamentalgleichung vorkommen, habe ich noch nicht ermitteln können; ich habe mich vergeblich bemüht, ein Beispiel dafür aufzufinden, habe aber ebenso wenig vermocht, dass Gegentheil zu beweisen. Jene Beschränkung ist also vielleicht unnöthig.“

Durch den soeben gegebenen Beweis ist die Richtigkeit jener *Kronecker*schen Vermuthung und die ausnahmslose Gültigkeit des von ihm zuerst ausgesprochenen Satzes von der Aequivalenz der Discriminanten der Gattung und der Fundamentalgleichung dargethan.

§ 5.

Mit Hülfe des im vorigen Abschnitte bewiesenen Satzes kann nun die Bestimmung der Zahlentheiler der Gattungsdiscriminante reducirt werden auf die Auffindung aller Theiler der ihr äquivalenten Discriminante der Fundamentalgleichung, und diese letztere Aufgabe ist viel leichter zu lösen als die erste.

Um nämlich zu bestimmen, wie oft eine beliebige Primzahl p in der Discriminante der Fundamentalgleichung enthalten ist, gehen wir aus von der Zerlegung der Fundamentalgleichung in ihre modulo p irreductiblen Factoren d. h. von der Congruenz:

$$F(w) \equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1}\mathfrak{F}_2^{\delta_2}\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h} \pmod{p}$$

und differentiiren dieselbe nach der Grösse w. Dann ergiebt sich die Congruenz:

$$\begin{aligned} F'(w) &\equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1-1}\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h-1}(\delta_1\mathfrak{F}_2\dots\mathfrak{F}_h+\delta_2\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3\dots\mathfrak{F}_h+\dots) \pmod{p} \\ &= \mathfrak{F}_1^{\delta_1-1}\dots\mathfrak{F}_h^{\delta_h-1}\Phi(w)+p\,\Psi(w), \end{aligned}$$

und hier ist die ganze Function von w

$$\Phi(w) = \delta_1\mathfrak{F}_2(w)\dots\mathfrak{F}_h(w)+\delta_2\mathfrak{F}_1(w)\mathfrak{F}_3(w)\dots\mathfrak{F}_h(w)+\dots$$

modulo p betrachtet gegen jede der h Functionen $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_h$ relativ prim, falls nicht etwa p in einem der h Exponenten $\delta_1, \dots, \delta_h$ als Theiler enthalten ist. In der That ist ja zum Beispiel:

$$\Phi(w) \equiv \delta_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\dots\mathfrak{F}_h \pmod{\mathfrak{F}_1(w)},$$

weil alle übrigen Summanden von Φ durch $\mathfrak{F}_1$ theilbar sind, und die Function auf der rechten Seite ist zu $\mathfrak{F}_1(w)$ modulo p betrachtet theilerfremd, weil dasselbe, falls p nicht in δ_1 enthalten ist, von allen ihren h Factoren gilt.

Ersetzt man nun in der obigen Congruenz w durch w_0, so ist die rechte, also auch die linke Seite *genau* durch das Product

$$P_1^{\delta_1-1}P_2^{\delta_2-1}\dots P_h^{\delta_h-1}$$

theilbar, weil der erste Summand nur diesen Divisor enthält, während $p\,\Psi(w)$

mindestens durch $p = P_1^{\delta_1} \ldots P_h^{\delta_h}$ theilbar ist. Es ist also:

$$F'(w_0) = (w_0 - w_1)(w_0 - w_2) \ldots (w_0 - w_{n-1}) = P_1^{\delta_1 - 1} \ldots P_h^{\delta_h - 1} . \overline{F},$$

wo $\overline{F}$ zu p theilerfremd ist. Geht man in dieser Gleichung auf beiden Seiten zur Norm über und beachtet dabei, dass einmal

$$NF'(w) = \Pi(w_i - w_k) = \mathfrak{D}(u_1, \ldots, u_n) = D\Delta^2(u_1, \ldots, u_n) \qquad (i \gtrless k)$$

und ferner, dass, wie bekannt und leicht zu erweisen,

$$N(P_i) = p^{\varkappa_i}$$

ist, wo $\varkappa_i$ die Ordnungszahl des betreffenden Primdivisors ist, so ergiebt sich die wichtige Gleichung:

$$\mathfrak{D}(u_1, \ldots, u_n) = p^{\varkappa_1(\delta_1 - 1) + \varkappa_2(\delta_2 - 1) + \cdots + \varkappa_h(\delta_h - 1)} . H(u_1, \ldots, u_n),$$

wo H eine ganze zu p theilerfremde Form bedeutet. Oder endlich, da

$$\varkappa_1 \delta_1 + \cdots + \varkappa_h \delta_h = n$$

und

$$\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_h = r$$

die Ordnungszahl von $(P_1 \ldots P_h)$ ist, so ergiebt sich der wichtige Satz:

Ist $p = P_1^{\delta_1} \ldots P_h^{\delta_h}$ die Zerlegung der Primzahl p in ihre Primfactoren und

$$N(P_1 \ldots P_h) = p^r$$

die Norm des Productes aller von einander verschiedenen Primfactoren, so ist die Gattungsdiscriminante genau durch

$$p^{n-r}$$

und durch keine höhere Potenz von p theilbar.

Eine Ausnahme tritt allein in dem Falle ein, dass einer der Exponenten $\delta_1, \ldots, \delta_h$ durch die Primzahl p theilbar ist. In diesem Falle lehrt die vorstehend gegebene Deduction nur, dass die $(n-r)$-te Potenz von p ebenfalls in der Gattungsdiscriminante enthalten ist, aber aus ihr selbst geht schon hervor, dass dies nicht die niedrigste Potenz von p ist. Die genauere Untersuchung dieses merkwürdigen Specialfalles soll an dieser Stelle nicht gegeben werden.

Als ein Corollar dieses allgemeinen Satzes werde noch der folgende hervorgehoben.

Eine Primzahl p ist dann und nur dann in der Discriminante einer Gattung $(\mathfrak{G})$ enthalten, wenn sie innerhalb $(\mathfrak{G})$ einen oder mehrere gleiche Primfactoren besitzt.

Denn die ganze Zahl $n-r$ ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn mindestens einer der Exponenten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_h$ grösser ist als Eins. Hieraus folgt ohne weiteres, dass innerhalb jeder Gattung (𝔊) nur eine beschränkte Anzahl von Primzahlen p existirt, welche gleiche Primfactoren besitzen, es sind dies eben allein die Theiler der Gattungsdiscriminante; alle anderen Primzahlen besitzen innerhalb (𝔊) lauter verschiedene Primfactoren.

Dem Beweise dieses Satzes und des oben gefundenen allgemeinen Theoremes ist die grosse Arbeit von ***R. Dedekind:*** „Ueber die Discriminanten endlicher Körper“ Abh. d. Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XXIX gewidmet. Mit Hülfe der soeben dargelegten Resultate kann man leicht den Gang dieser Untersuchung charakterisiren:

Herr ***Dedekind*** hatte diesen Beweis und allgemeiner eine ganze Theorie der Gattungen algebraischer Zahlen so zu geben versucht, dass er an Stelle der hier betrachteten Fundamentalform w_0, die alle ganzen Grössen gleichmässig vertritt, also mit Recht als eine Invariante derselben angesehen werden kann, eine geeignet gewählte specielle Grösse $\xi = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$ zu Grunde legte. In dem hier betrachteten Falle suchte er also an Stelle von $u_1, \ldots, u_n$ ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ zu setzen, so dass die so sich ergebende Grösse ξ modulo p betrachtet einer niedrigsten Congruenz von gleich hohem Grade wie die Fundamentalform genügt. Dies würde, wie eine einfache Betrachtung lehrt, dann und nur dann der Fall sein, wenn die vorher gefundene Determinante:

$$|U_{gh}| = \Delta(u_1, \ldots, u_n),$$

welche für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ durch p nicht theilbar ist, auch für $(u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n)$ zu p theilerfremd bliebe. Nun fand aber Herr ***Dedekind*** selbst, dass der Fall wirklich eintreten kann, und, wie gleich hinzugefügt werden mag, sehr häufig eintritt, dass jene primitive Form für *alle* ganzzahligen Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ durch p theilbar werden kann, ein Fall, dessen Auftreten in der folgenden Arbeit genau untersucht werden soll. Aus diesem Grunde kann der Beweis jener beiden Sätze nicht in der hier durchgeführten einfachen Weise gegeben werden, wenn man, wie dies in der ***Dedekind***schen Theorie geschieht, principiell von der Untersuchung von ganzzahligen Formen absieht und nur die ganzen algebraischen Zahlen selbst betrachtet. Herr ***Dedekind*** beweist nun a. a. O. diesen Satz mit den Mitteln seiner Theorie auf eine höchst scharfsinnige Weise unter Benutzung

der Begriffe der Ordnungen, ihrer Führer, der sog. complementären Basen etc. dadurch, dass er nachweist, dass die Gattungsdiscriminante die Norm eines Ideales ist und die idealen Primfactoren desselben bestimmt. So geistvoll nun auch jene Herleitung ist, so gehört sie zwar zu den schönsten, aber auch zu den schwierigsten der ganzen *Dedekind*schen Theorie, und es scheint, als ob hier die von *Kronecker* begründete auf die Betrachtung der algebraischen Formen basirte Theorie der algebraischen Zahlen, deren Elemente hier benutzt wurden, einfacher und naturgemässer zum Ziele führt. Diese Annahme wird auch dadurch bestätigt, dass der Entdecker jenes Fundamentalsatzes, Herr *Dedekind,* seinen Beweis desselben erst gesucht hat, nachdem er sich von der Unmöglichkeit überzeugt hatte, ihn auf ähnlichem Wege zu beweisen, wie dies hier geschah, wenn man sich auf die Betrachtung der algebraischen Zahlen allein beschränkt.

Endlich sei noch die Bemerkung gestattet, dass die hier benutzten unbestimmten Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ der Fundamentalform w_0 keinesweges nur aus formalen Gründen in die Untersuchung eingeführt sind, es ist vielmehr ihre Einführung nothwendig und hinreichend dafür, dass die Fundamentalform alle ganzen Zahlen, die Fundamentalgleichung alle ganzzahligen Gleichungen des Bereiches durch Specialisirung ergiebt; ihre Einführung ist hier genau ebenso nothwendig, wie die der Unbestimmten, etwa in der Theorie der binären quadratischen Formen. Die durch die Zerfällung der Fundamentalgleichung in ihre modulo p irreductiblen Factoren erhaltenen Primfactoren der Zahl p

$$P_h = p + \mathfrak{F}_h(w_0;\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$$

sind somit Formen, deren Unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ aufs Engste und Nothwendigste mit der hier behandelten Frage zusammenhängen, und ähnlich wird es in jedem Falle sein, wo die *Kronecker*sche Theorie der algebraischen Grössen auf ein bestimmtes Problem angewendet wird. Allerdings, und dies ist ein wesentlicher Punkt der Theorie *Kronecker*s, wird dann nachgewiesen, dass in einem solchen Theiler P_h nur das System der ganzen algebraischen Zahlen $p,\ \xi^{(1)},\ \xi^{(2)}, \ldots,$ von Bedeutung ist, welche in der Entwickelung von P_h nach $u_1, \ldots, u_n$ die Coefficienten der einzelnen Producte von Potenzen derselben sind, dass also jene Form P_h ersetzt werden kann durch eine andere, deren Coefficienten $p,\ \xi^{(1)},\ \xi^{(2)}\ \ldots,$ dieselben sind, während an Stelle jener Potenzenproducte beliebige andere Variablen treten; so kann z. B. P_h ersetzt

werden durch die Linearform:

$$p+v^{(1)}\xi^{(1)}+v^{(2)}\xi^{(2)}+\cdots,$$

wo $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, ... wieder Unbestimmte bedeuten, denn auch hier besitzen die Coefficienten p, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ..., genau wie vorher als einzigen gemeinsamen Theiler den Divisor P. Bei der Darstellung der allgemeinen Theorie der Divisoren, welche *Kronecker* in seiner Festschrift gegeben hat, ist naturgemäss die Unabhängigkeit der Divisoren von der speciellen Wahl der Unbestimmten betont, aber daraus ist nicht zu schliessen, dass dieselben mit dem jedesmal behandelten Probleme nichts zu thun haben, vielmehr werden bei einer jeden naturgemäss durchgeführten Untersuchung die in ihr auftretenden Unbestimmten in der allerengsten und nothwendigsten Beziehung zu dem behandelten Probleme stehen.

Berlin, October 1893.

Integrable Fälle der Differentialgleichung

$$(p_5y+p_4)\frac{dy}{dx}+p_3y^3+p_2y^2+p_1y+p_0 = 0.$$

(Von Herrn *Woldemar Heymann* in Chemnitz.)

In neuerer Zeit ist die Gleichung

$$(1.)\qquad (p_5y+p_4)\frac{dy}{dx}+p_3y^3+p_2y^2+p_1y+p_0 = 0$$

wiederholt untersucht worden, besonders von französischen Mathematikern (*Appell* u. A.). Zunächst hat man sich mit dem *Transformationsproblem* derselben beschäftigt und gewisse *invariantentheoretische* Eigenschaften aufgedeckt. Es sei nur beiläufig erwähnt, dass die Gleichung, wenn $p_3 = 0$, durch lineare Substitutionen und einfache Quadraturen auf die Normalformen

$$(2.)\qquad v\frac{dv}{du}+v = \varphi(u)$$

und

$$(3.)\qquad \frac{dv}{du}+u = \psi(v),$$

welche also nur von *einer* gegebenen Function abhängen, gebracht werden kann. — Vielleicht interessirt auch die Thatsache, dass die Gleichung *zweiten* Grades

$$(4.)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2X_1y+X_0 = 0$$

mittelst der Substitution

$$y = \tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{2}\frac{X_0}{X_1}$$

in ein Product

$$(5.)\qquad \left[z\frac{dz}{dx}+z\sqrt{X_1}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{X_0}{X_1}\right)'\right]\left[z\frac{dz}{dx}-z\sqrt{X_1}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{X_0}{X_1}\right)'\right] = 0$$

zerfällt werden kann, dessen gleich Null gesetzte Factoren von Gleichung (2.) nicht wesentlich verschieden sind*).

*) Vergl. die „Studien“ d. Verf. — Teubner 1891. — S. 348.

Was aber das *Integrationsproblem* anlangt, so ist man meines Wissens nicht weit damit gekommen. Ausser dem Falle, in welchem die p_i constant sind, hat noch Herr *Elliot* (Annales de l'École Norm. Sup. 1890) zwei Integrale aufgestellt, die in Bezug auf die abhängige Veränderliche y sehr einfach sind, welche aber einen Anspruch auf Allgemeinheit *nicht* erheben können.

Man könnte vermuthen, dass die Gleichung (1.) ein Integral besitzt, welches, wenn auch complicirt in x, so doch einfach und hinschreibbar in y sei.

Thatsächlich sind in dieser Richtung neuerdings vergebliche Versuche*) angestellt worden, und es dürfte daher angemessen sein nachzusehen, ob die Veränderliche y nicht auch zuweilen *complicirtere* Verbindungen innerhalb des allgemeinen Integrals eingeht.

Ich werde nun zeigen, dass die *abhängige* Veränderliche der Gleichung (1.) schon unter sehr einfachen Voraussetzungen für die Coefficienten p_i mindestens so verwickelt im allgemeinen Integral angetroffen wird, als man dieses von der *unabhängigen* Veränderlichen bei *Riccati*schen Gleichungen gewöhnt ist. Genauer gesprochen: In gewissen, immerhin noch einfachen Fällen wird y das *Argument von Transcendenten*, welche letztere durch *Riccati*sche Gleichungen definirt sind. — Durch diese Betrachtungen kommen von selbst einige in der Ueberschrift gemeinte integrable Fälle der Gleichung (1.) zur Sprache, von denen ich annehmen kann, dass sie *neu* sind.

I.

Wir gehen aus von der Gleichung**)

$$(6.)\qquad (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\frac{dy}{dx}+(\alpha_2+\beta_2 x)y^2+(\alpha_1+\beta_1 x)y+(\alpha_0+\beta_0 x)=0,$$

welche, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, mittelst der Substitutionen

$$x=\frac{a'+b'u}{c'+d'u},\quad y=\frac{a''+b''v}{c''+d''v},\quad v=\frac{u\,dw}{w\,du}$$

auf die Differentialgleichung der *Gauss*schen *hypergeometrischen Reihe* (mit

---

*) Vergl. *Güntsche*, Dissertation, Jena 1891. — *Haentzschel*, d. Journ. Bd. 112.

**) Vergl. die genannten „Studien". S. 61—64.

dem vierten Element u) zurückgeführt werden kann. Nun braucht man in (6.) bloss die Veränderlichen x, y unter einander zu vertauschen, um die Gleichung

$$(7.) \qquad \left[(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)+(\beta_2 x^2+\beta_1 x+\beta_0)y\right]\frac{dy}{dx}+\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3 = 0$$

zu erhalten, welche einen Specialfall von Gleichung (1.) darstellt.

Dieser Vorgang kann trivial erscheinen. Er ist es aber deswegen nicht, weil die Gleichung (6.) bisher wenig beachtet und nie von anderer Seite mitgetheilt worden ist. Wenn man will, kann ebenso (7.) als ursprüngliche Gleichung angesehen werden, und sie dürfte die allgemeinste ihrer Art sein, welch sich noch mittelst der ***hypergeometrischen Reihe*** integriren lässt.

Das vierte Element der Reihe ist nach der Vertauschung von x mit y

$$u = -\frac{a'-c'y}{b'-d'y},$$

also erscheint y sowohl in als ausserhalb derselben.

II.

Versteckter als diese Integration ist nachfolgende, welche auf eine ***Differentiations-*** resp. ***Substitutionsmethode*** hinausläuft. — Es werde vorausgesetzt, dass sämmtliche Coefficienten p_i der Gleichung (1.) ***lineare*** Functionen seien. Dann kann man aus (1.) eine zweite Gleichung ***derselben Art*** ableiten, deren Coefficienten bis zum sechsten Grade aufsteigen, ohne natürlich völlig allgemein zu sein, und das Integral der einen folgt aus dem der andern.

Die Gleichung (1.) lässt sich, wenn

$$p_i = \alpha_i+\beta_i x \qquad (i=0, 1, \ldots, 5)$$

auf folgende Art schreiben

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha_5 y+\alpha_4)\frac{dy}{dx}+\alpha_3 y^3+\alpha_2 y^2+\alpha_1 y+\alpha_0\\ &+x\left[(\beta_5 y+\beta_4)\frac{dy}{dx}+\beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0\right]\end{aligned}\right\} = 0,$$

und führt man die Bezeichnungen

$$\frac{dy}{dx} = y_1$$

und

$$\alpha_5 y+\alpha_4 = A_1(y), \quad \alpha_3 y^3+\alpha_2 y^2+\alpha_1 y+\alpha_0 = A_2(y),$$
$$\beta_5 y+\beta_4 = B_1(y), \quad \beta_3 y^3+\beta_2 y^2+\beta_1 y+\beta_0 = B_2(y)$$

ein, so lautet die vorige Gleichung einfach

$$(8.) \qquad x = -\frac{A_1 y_1+A_2}{B_1 y_1+B_2}.$$

Differentiirt man diese einmal nach x und berücksichtigt, dass $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} \cdot y_1$, so resultirt

$$(9.) \qquad (A_1 B_2-A_2 B_1) y_1 \frac{dy_1}{dy} + (B_1 y_1+B_2)^2 + \begin{bmatrix} (B_1 y_1+B_2)(A_1' y_1+A_2') \\ -(A_1 y_1+A_2)(B_1' y_1+B_2') \end{bmatrix} y_1 = 0,$$

d. h. eine Differentialgleichung der verlangten Art mit den Veränderlichen y und y_1. Unter A', B' sind die Ableitungen von A, B nach y zu verstehen. Trägt man den Werth von x aus (8.) in das Integral der ursprünglichen Gleichung (1.) ein, so ergiebt sich dasjenige von (9.).

Soll nun die eben mitgetheilte Substitutionsmethode eine eigentliche Integration vermitteln, so ist dafür Sorge zu tragen, dass entweder (1.) oder (9.) an sich integrabel werde. Ein Fall, welcher sich von selbst darbietet, ist der, wenn

$$p_3 = p_5 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_5 = \beta_5 = 0,$$

denn dann wird (1.) Specialfall von (6.). Die Gleichung (9.) wird sonach integrabel, wenn A_1 und B_1 gegebene Constanten und A_2 und B_2 beliebig vorgelegte Functionen *zweiten* Grades in y sind.

Ein Beispiel, welches die *wiederholte* Anwendung der vorigen Methode gestattet, liefert die *Riccati*sche Gleichung

$$(10.) \qquad \frac{dy}{dx}+\alpha x+\beta y^2 = 0.$$

Für $\frac{dy}{dx} = y_1$, $\frac{dy_1}{dy} = y_2$ entspringen aus ihr nach einander folgende integrable Specialfälle der Gleichung (1.):

$$(11.) \qquad y_1 \frac{dy_1}{dy} + \alpha + 2\beta y y_1 = 0,$$

$$(12.) \qquad y_2 \frac{dy_2}{dy_1} - \frac{\alpha}{y_1^2} y_2 + 2\beta = 0.$$

Aus diesen Angaben dürfte zweifellos hervorgehen, dass eine Integration der Gleichung (1.) in *geschlossener Form* im Allgemeinen *nicht* in Aussicht steht, weder in Bezug auf die *abhängige* noch die *unabhängige* Veränderliche.

Chemnitz, December 1893.

Bemerkungen über die *Frenet-Serret*schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Raumcurven.

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Dorpat.)

§ 1.

Einleitung und Formulirung des Problems.

In der Infinitesimalgeometrie der Raumcurven ist ein Gleichungssystem von fundamentaler Bedeutung, welches die Differentiale der Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale durch diese Grössen selbst, die Krümmung und Torsion ausdrücken lehrt. Auf den bezeichneten drei Geraden seien positive Richtungen so fixirt, dass sie bei der obigen Reihenfolge derselben ebenso zu einander liegen wie die positiven Axen der Coordinaten x, y, z, und zwar sei die positive Richtung der Tangente willkürlich, diejenige der Hauptnormale gehe vom Punkt der Curve zum Krümmungscentrum hin, womit dann die positive Richtung der Binormale von selbst eindeutig bestimmt ist. Nennt man dann das Bogenelement ds, den Krümmungsradius ϱ und die Torsion $1:\tau$, bezeichnet man ferner durch α, β, γ die Richtungscosinus der definirten positiven Richtungen, indem man den Index 1 der Tangente, 2 der Hauptnormale, 3 der Binormale entsprechen lässt, so bestehen die Gleichungen

$$(1.)\qquad \frac{d\alpha_1}{ds}=\frac{\alpha_2}{\varrho},\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=-\frac{\alpha_1}{\varrho}+\frac{\alpha_3}{\tau},\quad \frac{d\alpha_3}{ds}=-\frac{\alpha_2}{\tau},$$

und zwei ähnliche Systeme, in denen nur entweder β oder γ an Stelle von α geschrieben wird. Diese Formeln werden bald nach *Frenet*, bald nach *Serret* benannt, nach ersterem wohl mit grösserer Berechtigung, da sie in einer von ihm verfassten Arbeit*) vorkommen, die schon im Jahre 1847

*) *Frenet*, sur les courbes à double courbure, Journal de mathématiques (I. série) t. XVII p. 437.

einer französischen Facultät als Dissertation vorgelegen hat, während die Abhandlung von ***Serret,*** in welcher die Formeln (1.) ebenfalls abgeleitet werden*), erst im Jahre 1852 erschienen ist.

Es tritt hier nun der merkwürdige Umstand ein, dass die Krümmung stets als positive Grösse, die Torsion aber bald positiv, bald negativ genommen werden muss, weshalb auch in manchen Darstellungen die mit dem Buchstaben τ behafteten Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben wie in den Gleichungen (1.) Da nun die Torsion zunächst wie die Krümmung als eine wesentlich positive Grösse definirt zu werden pflegt, so fragt sich, mit welchem Vorzeichen dieselbe versehen werden muss, um für $1:\tau$ in die Formeln (1.) eingesetzt werden zu können. Die meisten Autoren übergehen diese Frage, z. B. ***Serret***; in einigen neueren Darstellungen, z. B. bei *Picard***) und *Darboux****) wird eine analytische oder kinematische Bestimmung des Zeichens der Grösse $1:\tau$ gegeben, bei welcher unklar bleibt, ob die gewöhnliche Formel

$$(2.)\qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

richtig bleibt, oder etwa eine Seite mit dem Minuszeichen versehen werden muss. Das ist natürlich durch Rechnung leicht zu entscheiden, indem man die Formeln (1.) zu verificiren versucht. In der That weisen z. B. *Jordan*†) und *Laurent*††) durch einfache Ausrechnung nach, dass die Formeln (1.) mit dem Ausdruck (2.) richtig sind, indem man für die Grössen α, β, γ bekannte Ausdrücke einsetzt; es bleibt aber ungewiss, ob die analytischen Ausdrücke der Richtungscosinus den oben geometrisch definirten drei Richtungen, oder etwa zum Theil den entgegengesetzten entsprechen. Noch anders verfährt ***Frenet*** in der citirten Abhandlung; durch die Relationen, die er zwischen den neun Grössen α, β, γ bestehen lässt, werden wenigstens indirect die drei fraglichen Richtungen eindeutig definirt und dann aus den Formeln (1.) der Ausdruck (2.) abgeleitet. ***Frenet*** giebt auch

*) ***Serret,*** Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de mathématiques t. XVI, p. 193.

**) *Picard,* Traité d'analyse t. I. p. 365.

***) *Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces t. I, p. 7.

†) *Jordan,* Cours d'analyse t. I, p. 278.

††) *Laurent,* Traité d'analyse t. II, p. 373.

eine geometrische Unterscheidung der Fälle, in denen die Grösse $1:\tau$ positiv oder negativ ist; dieselbe ist aber nicht die einfachst mögliche und nur eben skizzirt.

In den folgenden Zeilen wird nun nachgewiesen, ***dass die Unterscheidung positiver und negativer Werthe von τ in den Frenetschen Formeln mit der Unterscheidung der rechts und links gewundenen Raumcurven auf eins hinausläuft,*** und es wird eine Ableitung dieser Formeln gegeben, bei welcher die geometrische Bedeutung des Zeichens der Grösse τ von vornherein benutzt und die Formel (2.) nachgewiesen wird; die erwähnte geometrische Unterscheidung von ***Frenet*** ergiebt sich als Corollar.

Diese einfachen Betrachtungen mögen als ein Beitrag zur vollständigeren Durchführung des ***Gauss-Möbius***schen Zeichenprincips in der Infinitesimalgeometrie der Raumcurven angesehen werden.

§ 2.

Beweis der *Frenet*schen Formeln mit geometrischer Deutung der Vorzeichen.

Um mit bestimmten Vorstellungen zu operiren, seien immer die positiven Axen der Coordinaten x, y, z nach Westen, Süden und dem Zenith gerichtet. Der Sinn einer Drehung um irgend eine Richtung herum, d. h. um eine Axe bei fixirter positiver Richtung derselben, ist dann positiv, wenn die Drehung zu der Richtung liegt wie die Drehung von West über Süd nach Ost zur Richtung nach oben.

Man denke sich nun eine Raumcurve dadurch definirt, dass die Coordinaten x, y, z eines beliebigen ihrer Punkte P als Functionen eines Parameters t gegeben sind. Die Differentiation nach t werde durch Accente bezeichnet, s sei der Bogen der Curve in der Richtung wachsender Werthe von t gemessen, so dass s' eine stets positive Grösse ist. Fixirt man dann die positive Richtung der Tangente so, dass sie im Berührungspunkte mit der Richtung wachsender Werthe von t längs der Curve übereinstimmt, so ist

$$\alpha_1 = \frac{x'}{s'}, \quad \beta_1 = \frac{y'}{s'}, \quad \gamma_1 = \frac{z'}{s'};$$

setzt man noch

$$A = y'z'' - y''z', \quad B = z'x'' - z''x', \quad C = x'y'' - x''y',$$

so sind die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungscentrums gegeben durch die Formeln

$$(3.) \qquad \xi - x = \frac{(z'B - y'C)s'^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \eta - y = \frac{(x'C - z'A)s'^2}{A^2+B^2+C^2}, \quad \zeta - z = \frac{(y'A - x'B)s'^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Den linken Seiten dieser Gleichungen sind also die Grössen α_2, β_2, γ_2 proportional und unterscheiden sich von ihnen nur um einen positiven Factor, da die positive Richtung der Hauptnormale vom Punkte P zum Krümmungscentrum hingeht.

In einer Kugel nun, welche um den Coordinatenanfangspunkt O mit dem Radius Eins beschrieben ist, ziehe man Radien parallel zu den positiven Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale; die Endpunkte dieser Radien seien T, N_1, N_2; ihre Coordinaten sind die neun Grössen α, β, γ, und der Punkt T beschreibt die sogenannte sphärische Indicatrix, deren durch O gehende Tangentialebenen den Schmiegungsebenen der gegebenen Curve parallel sind. Es seien $\overline{T}$ und $\overline{P}$ die dem Parameter $t+dt$ entsprechenden Punkte der Indicatrix bez. der Curve, das Differential dt sei positiv; dann sind die Componenten der Strecke $T\overline{T}$ nach den Coordinatenaxen

$$d\alpha_1 = d\left(\frac{x'}{s'}\right) = \frac{Bz'-Cy'}{s'^3}\,dt, \quad d\beta_1 = \frac{Cx'-Az'}{s'^3}\,dt, \quad d\gamma_1 = \frac{Ay'-Bx'}{s'^3}\,dt,$$

also von den rechten Seiten der Gleichungen (3.), mithin auch von den Grössen α_2, β_2, γ_2 nur um einen positiven Factor unterschieden. Die Richtung der sphärischen Indicatrix im Sinne wachsender Werthe von t stimmt also mit der positiven Richtung der Hauptnormale, die Richtung $T\overline{T}$ mit mit ON_1 überein.

Die Ebene OTN_1 sei nun etwa horizontal, die Richtung ON_2 gehe vertical aufwärts; ist dabei OT etwa die Richtung nach Westen, so geht der Radius ON_1 nach Süden bei der vorausgesetzten Orientirung der positiven Richtungen auf der Tangente, Hauptnormale und Binormale. Dann wird der grösste Kreis TN_1, in welchem die Kugel von der horizontalen Ebene OTN_1 geschnitten wird, in T von der sphärischen Indicatrix berührt, und die Richtung $T\overline{T}$ geht, übereinstimmend mit ON_1, nach Süden. Die Indicatrix tritt also bei wachsenden Werthen von t im Punkte T nach oben und Süden oder nach unten und Süden aus der Ebene OTN_1 heraus, je nachdem sie in der Umgebung des Punktes T auf der einen oder andern Seite des Kreises TN_1 liegt. Es trete etwa der erste dieser beiden Fälle ein; dann tritt der in $\overline{T}$ die Indicatrix berührende grösste Kreis der Kugel, dessen Ebene ε heisse, mit seiner südlichen Hälfte nach oben aus der Ebene OTN_1 heraus, da er die nach oben und bis auf unendlich kleines nach Süden zeigende positive Richtung der Tangente des Punktes $\overline{T}$ enthält. Die Ebene

ε ist also gegen die horizontale Ebene OTN_1 im positiven Sinne unendlich wenig gedreht um eine Axenrichtung, welche von OT unendlich wenig verschieden ist. Da nun die Schmiegungsebene in $\overline{P}$ mit der Ebene ε parallel ist, so folgt, dass die Schmiegungsebene beim Uebergange von P zu $\overline{P}$ eine unendlich kleine Drehung im positiven Sinne um die positive Richtung der Tangente herum ausführt. — Das Entgegengesetzte tritt natürlich ein, wenn die Indicatrix in der Umgebung des Punktes T unterhalb der Ebene OTN_1 verläuft, wobei dann aus dieser die nördliche Hälfte der Ebene ε nach oben heraustritt.

Verschieden in beiden Fällen ist das Verhalten der Binormale. Es gehe der Punkt N_2 in $\overline{N}_2$ über, wenn man t durch $t+dt$ ersetzt; offenbar ist N_2 der oben liegende Pol der Ebene ε. Dann ist evident, dass der Punkt $\overline{N}_2$ im ersten der beiden Fälle nördlich von N_2 liegt, d. h. dass die Richtung $N_2\overline{N}_2$ der Richtung $T\overline{T}$ entgegengesetzt ist; im zweiten Falle sind beide identisch; denn die Schnittlinie von ε mit der Ebene der Zeichnung ist von OT unendlich wenig verschieden, die Richtungen OT und $N_2\overline{N}_2$ sind also jedenfalls bis auf unendlich kleines zu einander senkrecht. Nach einer früheren Bemerkung sind also auch die Richtungen $N_2\overline{N}_2$ und ON_1 im ersten Falle entgegengesetzt, im zweiten identisch. Nun sind α_3, β_3, γ_3 die Coordinaten des Punktes N_2, mithin $d\alpha_3$, $d\beta_3$, $d\gamma_3$ die Componenten der Strecke $N_2\overline{N}_2$ nach den Coordinantenaxen; man kann also jedenfalls setzen

$$(4.) \qquad d\alpha_3 = \frac{-\alpha_2\, ds}{\tau}, \quad d\beta_3 = \frac{-\beta_2\, ds}{\tau}, \quad d\gamma_3 = \frac{-\gamma_2\, ds}{\tau},$$

wobei τ zunächst nur einen Proportionalitätsfactor bedeutet, der im ersten unserer beiden Fälle positiv, im zweiten negativ ist. Damit ist zunächst das Zeichen dieser wohl bestimmten Grösse geometrisch gedeutet; ihr absoluter Betrag ist durch die aus (4.) folgende Gleichung

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{d\alpha_3^2 + d\beta_3^2 + d\gamma_3^2}{ds^2}$$

gegeben. Da nun der Zähler rechts das Quadrat des von zwei aufeinanderfolgenden Binormalen gebildeten Winkels ist, so ist $1 : |\tau|$ die Torsion im Sinne der gewöhnlichen Definition. Damit ist gezeigt, dass die Gleichungen (4.) mit dem dritten System der *Frenet*schen Formeln (1.) identisch sind.

Das erste System der *Frenet*schen Formeln ergiebt sich unmittelbar aus der mehrfach benutzten Identität der Richtungen $T\overline{T}$ und ON_1; aus dieser

Identität folgt, dass man setzen kann

$$d\alpha_1 = \frac{\alpha_2 ds}{\varrho}, \quad d\beta_1 = \frac{\beta_2 ds}{\varrho}, \quad d\gamma_1 = \frac{\gamma_2 ds}{\varrho},$$

wobei der Proportionalitätsfactor ϱ stets positiv ist. Dass dann $1:\varrho$ die erste Krümmung ist, ergiebt sich aus der unmittelbar ersichtlichen Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2}{ds^2} = \left(\frac{x'}{s'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{s'}\right)^2 + \left(\frac{z'}{s'}\right)^2.$$

Endlich ist das zweite System der *Frenet*schen Formeln aus dem ersten und dritten auf Grund der zwischen den Grössen α, β, γ bestehenden Relationen leicht abzuleiten*).

Hiermit ist unser nächstes Ziel erreicht; bedenkt man, dass die Richtung wachsender Werthe von t als eine beliebige der beiden Fortgangsrichtungen längs der Curve angesehen werden kann, so kann man das erhaltene Resultat in folgender Weise formuliren.

In den Frenetschen Formeln (1.) *ist die Torsion* $1:\tau$ *positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem beim Fortgang längs der Curve die Schmiegungsebene um die in der Fortgangsrichtung gezogene Tangente eine unendlich kleine Drehung positiven oder negativen Sinnes ausführt.*

§ 3.

Die analytische Unterscheidung rechts und links gewundener Curven.

Die gefundene geometrische Deutung des Zeichens der Grösse τ ist von infinitesimalem Charakter; man kann aber leicht eine Deutung durch Lagenverhältnisse endlicher Figuren ableiten.

Zunächst ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0,$$
$$\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' = -\alpha_1'\alpha_3 - \beta_1'\beta_3 - \gamma_1'\gamma_3$$

mittelst des ersten Systems der *Frenet*schen Formeln

$$\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' = -\frac{s'}{\varrho}(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) = 0;$$

hieraus folgt

$$\alpha_1'\alpha_3 + \beta_1'\beta_3 + \gamma_1'\gamma_3 = 0,$$

*) *Picard* l. c. p. 365.

also mit Benutzung des ersten und dritten *Frenet*schen Systems

$$(5.)\qquad \alpha_1''\alpha_3+\beta_1''\beta_3+\gamma_1'\gamma_3'' = -\alpha_1'\alpha_3'-\beta_1'\beta_3'-\gamma_1'\gamma_3' = \frac{s'^2}{\varrho\tau}(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2) = \frac{s'^2}{\varrho\tau}.$$

Hier gebrauchen wir die analytischen Ausdrücke von α_3, β_3, γ_3 einschliesslich ihres wohldefinirten Vorzeichens. Da die Gleichung der Schmiegungsebene geschrieben werden kann

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z) = 0,$$

so folgt zunächst

$$\alpha_3 = \frac{A\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \beta_3 = \frac{B\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \gamma_3 = \frac{C\varepsilon}{\sqrt{A^2+B^2+C_2}},$$

wo die Quadratwurzel positiv und $\varepsilon^2 = +1$ ist. Zur Bestimmung von ε führt die Gleichung

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1,$$

welche aus der festgesetzten Orientirung der Richtungen T, N_1, N_2 folgt; bedenkt man, dass die Grössen α_2, β_2, γ_2 von den rechten Seiten der Gleichungen (3.) nur um einen positiven Factor unterschieden sind und dass s' positiv ist, so folgt, dass die Grösse δ sich nur um einen positiven Factor von der folgenden unterscheidet:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ z'B-y'C & x'C-z'A & y'A-x'B \\ \varepsilon A & \varepsilon B & \varepsilon C \end{vmatrix} = \varepsilon\{(z'B-y'C)^2+(x'C-z'A)^2+(y'A-x'B)^2\}.$$

Daraus ergiebt sich $\varepsilon = +1$. Setzt man die so erhaltenen Werthe von α_3, β_3, γ_3 in die Gleichung (5.) ein, so ergiebt sich

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\varrho}{s'^2\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left\{A\left(\frac{x'}{s'}\right)''+B\left(\frac{y'}{s'}\right)''+C\left(\frac{x'}{s'}\right)''\right\},$$

oder mit Benutzung des in § 2 angegebenen Werthes der positiven Grösse ϱ und nach leichter Rechnung

$$(6.)\qquad \frac{1}{\tau} = \frac{Ax'''+By'''+Cz'''}{A^2+B^2+C^2} = \frac{1}{A^2+B^2+C^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

eine bekannte Formel, deren Ableitung deshalb nöthig war, weil sie in

manchen Darstellungen rechts noch mit einem Minuszeichen behaftet ist, wobei dann auch die *Frenet*schen Formeln entsprechend zu modificiren sind. Jedenfalls ist bei unserer Definition der Grösse τ das Vorzeichen derselben identisch mit dem Vorzeichen der Grösse

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Die geometrische Deutung dieses Zeichens gelingt mit Hülfe eines von *Schwarz* herrührenden Satzes von fundamentaler Bedeutung*), der für unsere Zwecke folgendermassen formulirt werden kann. Sind x, y, z Functionen von t, welche für irgend ein Intervall J dieser Variablen endlich und stetig sind und endliche und stetige Differentialquotienten erster, zweiter und dritter Ordnung besitzen; sind ferner x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, ... die Werthe dieser Functionen x, y, z, x', ... für $t = t_\nu$, so liegt der Werth des Quotienten

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{vmatrix} = Q,$$

wenn die Grössen t_ν dem Intervall J angehören, zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe des Ausdruckes

$$\begin{vmatrix} x'_5 & y'_5 & z'_5 \\ x''_6 & y''_6 & z''_6 \\ x'''_7 & y'''_7 & z'''_7 \end{vmatrix} = D(t_5, t_6, t_7),$$

die dieser annimmt, wenn die Grössen t_5, t_6, t_7 auch dem Intervall J angehören und die Ungleichungen

(7.) $$t_5 \leqq t_6 \leqq t_7$$

bestehen.

Die Grösse D ist, zufolge der Stetigkeit der in ihr auftretenden Differentialquotienten, offenbar eine stetige Function ihrer Argumente, und es besteht die Gleichung

$$D(t, t, t) = \Delta;$$

*) *H. A. Schwarz,* Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes, Annali di matematica (ser. II) t. X p. 129. Gesammelte math. Abhandlungen Bd. II p. 296.

wenn also die Grösse Δ für irgend einen Werth von t zwischen irgend zwei Grenzen g_1 und g_2 liegt, so kann ein diesen Werth t umfassendes Intervall J derart abgegrenzt werden, dass für alle ihm angehörigen Werthe t_5, t_6, t_7 auch die Grösse $D(t_5, t_6, t_7)$ innerhalb des Intervalles von g_1 bis g_2 verbleibt. Bestehen dann für t_5, t_6, t_7 die Ungleichungen (7.), so liegt nach dem *Schwarz*schen Theorem auch der Quotient Q zwischen g_1 und g_2. In der Umgebung eines beliebigen Punktes unserer Raumcurve kann also ein den Punkt umfassender Bogen derart abgegrenzt werden, dass der für irgend vier Punkte 1, 2, 3, 4 dieses Bogens mit den Parameterwerthen $t_1, \ldots, t_4$ gebildete Quotient Q von Δ so wenig wie man will verschieden ist.

Hieraus ergiebt sich zunächst der in der Geometrie der Raumcurven fundamentale Satz*), dass in der Umgebung eines nicht singulären Punktes der Raumcurve ($\Delta \gtrless 0$) ein Bogen abgegrenzt werden kann, der keiner Ebene mehr als dreimal begegnet; denn lägen etwa die vier Punkte 1, 2, 3, 4 in einer Ebene, so wäre $Q = 0$. Aber auch wenn die Grösse Q von Null verschieden ist, hat sie eine leicht angebbare Bedeutung; ihr Zähler ist bis auf einen positiven Factor der Rauminhalt des Tetraeders 1234, mit dem positiven oder negativen Zeichen nach der *Möbius*schen Regel**) versehen. Der Nenner ist positiv, wenn eine der Relationen

$$\text{(8.)} \qquad \begin{cases} t_1 < t_2 < t_3 < t_4, \\ t_1 > t_2 > t_3 > t_4, \end{cases}$$

besteht; folgen ***also vier Punkte*** 1, 2, 3, 4 ***in dieser Reihenfolge längs der Curve auf einander und liegen sie hinreichend nahe bei einem Punkte, in welchem die Grösse Δ nicht verschwindet, so hat der algebraische Inhalt des Tetraeders*** 1234 ***das Vorzeichen der Grösse Δ.*** Die Punkte 1, 2, 3, 4 können dabei offenbar, entsprechend den beiden möglichen Relationen (8.), sowohl in der Richtung wachsender wie abnehmender Werthe von t auf einander folgen, wie denn auch das Zeichen der Grösse Δ ungeändert bleibt, wenn man t durch $-t$ ersetzt.

Man kann das erhaltene Resultat erweitern und zugleich präcisiren, indem man bedenkt, dass das Tetraedervolumen 1234 sein Zeichen nur

*) Ein analytischer Beweis desselben ist mir nicht bekannt. Einen geometrischen habe ich angedeutet in der Abhandlung: Allgemeine Sätze über die scheinbaren Singularitäten etc., Math. Annalen Bd. XXXIV, p. 211.

) ***Möbius,* Statik § 63.

ändert, wenn die vier Ecken in einer Ebene liegen; es ist dieses Zeichen also constant, wenn die vier Ecken nur einem Bogen angehören, der keiner Ebene mehr als dreimal begegnet und auf welchem Δ von Null verschieden bleibt, also auch die Torsion $1:\tau$ nicht verschwindet; da nun nach Formel (6.) die Grössen τ und Δ gleichen Vorzeichens sind, so hat man jetzt in dem Vorzeichen des Tetraedervolumens 1234 die gesuchte Deutung des Zeichens, mit welchem die Torsion in den *Frenet*schen Formeln auftritt, an einer endlichen geometrischen Figur.

§ 4.

Weitere geometrische Interpretation des erhaltenen Resultats.

Das Vorzeichen des Tetraeders 1234 kann unter anderm nach folgender Regel bestimmt werden. Der Punkt 5 durchlaufe die endliche Strecke 14 von 1 nach 4 hin; dann ist das fragliche Zeichen das positive oder negative, je nachdem die Ebene [235] sich um die Richtung 23 im positiven oder negativen Sinne dreht. Um diese Bestimmung noch anders formuliren zu können, untersuchen wir, ob die Ebene [235] identificirt werden kann mit einer Ebene [236], wenn der Punkt 6 den Bogen 14 durchläuft. Eine specielle Lage der letzteren wird erhalten, wenn der Punkt 5 in die Lage 2 rückt; ist $t^{(2)}$ die Tangente dieses Punktes, so geht dann die Ebene [236] in die Lage $[|23|t^{(2)}]$*) über. Diese Ebene wird im Punkte 3 von der Curve durchdrungen, im Punkte 2 nicht durchdrungen; da nun angenommen wird, dass der Bogen 14 keiner Ebene mehr als dreimal begegnet, so hat die Ebene $[|23|t^{(2)}]$ ausser den erwähnten beiden keine Punkte mit dem Bogen 14 gemein; also liegen die Endpunkte 1 und 4 auf verschiedenen Seiten der bezeichneten Ebene, dieselbe trifft die endliche Strecke 14. Diese Strecke wird also von der Ebene [236] jedenfalls in speciellen Lagen derselben getroffen. — Wenn nun der Punkt 6 den Bogen 14 in ungeänderter Richtung durchläuft, so kann der Drehungssinn der Ebene [236] sich nach einem der bekannten *Staudt*schen Sätze**) nicht ändern, da die Ebene niemals die Curve berührt und letztere auf dem Bogen 14 keinen Rückkehrpunkt besitzt; da ferner die Geraden |14| und |23| sich nicht schneiden, so folgt weiter, dass auch der Schnittpunkt (|14|[236]) die Richtung seiner

*) In der leicht verständlichen Bezeichnungsweise von *Schröter*.

**) *Staudt*, Geometrie der Lage Nr. 208 und 209. Vgl. auch Math. Annalen Bd. XXXIV, p. 209.

Bewegung nicht ändert. Dieser Punkt gehört aber, wie gezeigt, in speciellen Lagen der endlichen Strecke 14 an, seine Anfangslage ist 1, seine Endlage 4; derselbe durchläuft also die endliche Strecke 14 genau einmal von 1 bis 4, und kann demgemäss mit 5 identificirt werden; desgleichen die Ebenen [235] und [236]. Man kann also auch sagen: je nachdem die Ebene [236] sich um die Richtung 23 im positiven oder negativen Sinne dreht, ist das Zeichen des Tetraeders 1234 positiv oder negativ.

Jetzt ist leicht einzusehen, dass die Unterscheidung nach dem Drehungssinn der Ebene [236] mit der Unterscheidung rechts und links gewundener Curven auf dasselbe hinauskommt. Zu diesem Zweck ziehe man durch alle Punkte des Bogens 23 Parallelen zu |23|; dieselben bilden eine geschlossene, sich selbst nicht durchdringende Cylinderfläche, welche in |23| eine Kante besitzt. Die Ebenen, welche diese mit irgend einer Generatrix des Cylinders verbinden, sind die Ebenen [236], in welchen der Punkt 6 dem Bogen 23 angehört; für die Lagen 2 und 3 erhält man die beiden Tangentialebenen τ_1 und τ_2 des Cylinders längs der Kante |23|. Es gehe nun die Richtung 23 etwa vertical aufwärts; der Schnitt des Cylinders mit einer horizontalen Ebene η ist eine vom Punkte $(|23|\eta) = Q$ ausgehende und zu ihm zurückkehrende Curve $\mathfrak{C}$, welche in Q die Tangenten $|\tau_1\eta|$ und $|\tau_2\eta|$ besitzt. Wegen der für den Bogen 14 geltenden Voraussetzungen hat keine dieser Tangenten mit der Curve $\mathfrak{C}$ ausser dem Berührungspunkte einen Punkt gemein; die Curve verläuft also, da sie auch im Endlichen verbleibt, ganz in einem bestimmten von den Geraden $|\eta\tau_1|$ und $|\eta\tau_2|$ gebildeten Winkel $\mathfrak{W}$. Der Punkt 6′ nun, in welchem der Punkt 6 sich parallel der Richtung 23 auf die Ebene η projicirt, durchläuft die Curve $\mathfrak{C}$ von Q ausgehend und zu Q zurückkehrend, während der Punkt 6 den Bogen 23 beschreibt; die Gerade $|Q6'|$ dreht sich also ohne Aenderung des Drehungssinnes aus der Lage $|\eta\tau_1|$ in die Lage $|\eta\tau_2|$. Eine solche Drehung geschieht in der Richtung von West über Süd nach Ost, wenn für eine auf der convexen Seite des Winkels $\mathfrak{W}$ stehende Person die diesen Winkel begrenzende Hälfte der Geraden $|\eta\tau_1|$ nach rechts, also auch der Punkt 6′ zu Anfang seiner Bewegung von Q aus nach rechts zu gehen scheint. Die Drehung der Ebene [236] oder $[Q26']$ um die Richtung 23 ist dann positiven Sinnes; bei einer solchen Drehung geht also der Punkt 6, von der Aussenseite des Cylinders betrachtet, von der Kante |23| aus zu Anfang seiner Bewegung nach rechts, indem er aufsteigt; der Cylinder wird

also von der Curve 23 nach rechts hin umwunden. Die Curve scheint dann bei der angegebenen Betrachtungsweise von links unten über die Vorderseite des Cylinders nach rechts oben zu gehen, also so wie die gewöhnlichen rechts gewundenen*) Schraubenlinien der Praxis. Bei negativer Drehung der Ebene [236] findet natürlich das Entgegengesetzte statt. Man kann dieses Resultat wie folgt aussprechen.

In den Frenetschen Formeln ist die Grösse τ positiv oder negativ, je nachdem die Curve rechts oder links gewunden ist, vorausgesetzt, dass die Coordinatenrichtungen so zu einander orientirt sind wie die Richtungen nach Westen, Süden und oben. Hat der Bogen AB der Curve mit keiner Ebene mehr als drei Punkte gemein und läuft der Punkt C längs der Curve von A nach B, so dreht sich die Ebene [ABC] um die Richtung AB bei rechtsgewundenen Curven in demselben, bei linksgewundenen im entgegengesetzten Sinne wie die Drehung von West über Süd nach Ost um die Richtung nach oben.

Um endlich auch die *Frenet*sche Unterscheidung der beiden bezeichneten Fälle abzuleiten, lasse man die Punkte 2 und 3 zusammenfallen, wobei dann offenbar der Drehungssinn der Ebene [236] derselbe ist wie der Drehungssinn der Ebene $[t^{(2)}6]$ um die positive Richtung der Tangente $t^{(2)}$ des Punktes 2. Die Projection des Bogens 14 hat jetzt entsprechend dem Punkte 2 eine Spitze Q; die Richtung der Rückkehrtangente nach der concaven Seite der Spitze hin stimmt, wie plausibel ist und gleich noch bewiesen werden soll, mit der positiven Richtung der Hauptnormale überein; geht dieselbe in der horizontal gedrehten Projectionsebene etwa nach Westen, so geht, da die Tangente nach oben zeigt, die Binormale nach Süden. Liegt die Projection des Punktes 1 nördlich der Hauptnormale, so geschieht die Drehung des Strahles $Q6'$ in der Richtung von West über Süd nach Ost, dann ist also die Drehung der Ebene $[t^{(2)}6]$ positiv; die Projection durchdringt in diesem Falle die Hauptnormale, die Raumcurve also die Schmiegungsebene in derselben Richtung wie die Binormale in ihrer positiven Richtung. Das Entgegengesetzte tritt ein, wenn die Drehung der Ebene $[t^{(2)}6]$ negativen Sinnes ist. Damit hat man das von *Frenet* angedeutete Resultat: *die Grösse τ in den Frenetschen Formeln ist positiv oder*

*) Die Bezeichnungen rechts und links gewunden werden oft auch im entgegengesetzten Sinne wie hier gebraucht.

negativ, je nachdem die Curve ihre Schmiegungsebene in demselben oder dem entgegengesetzten Sinne wie die positive Richtung der Binormale durchdringt.

Es bleibt nur noch nachträglich zu zeigen, dass die Grenzlage der Richtung $Q6'$, wenn der Punkt 6 in die Lage 2 rückt, mit der positiven Richtung der Hauptnormale dieses Punktes übereinstimmt. Zu diesem Zwecke führe man in der Normalebene des Punktes 2 die rechtwinkligen Coordinaten X und Y ein, deren positive Axen die positiven Richtungen der Hauptnormale und Binormale seien; beziehen sich dann die Grössen α, β, γ auf den Punkt 2, so hat man offenbar

$$\begin{aligned} X &= \alpha_2(x-x_2)+\beta_2(y-y_2)+\gamma_2(z-z_2), \\ X' &= \alpha_2 x'+\beta_2 y'+\gamma_2 z' = 0, \\ X'' &= \alpha_2 x''+\beta_2 y''+\gamma_2 z''. \end{aligned}$$

Nun sind die Grössen α_2, β_2, γ_2 nach § 2 von den Grössen

$$(z'B-y'C)_2, \quad (x'C-z'A)_2, \quad (y'A-x'B)_2$$

nur um einen positiven Factor verschieden, wobei der Index 2 bedeutet, dass $t=t_2$; also kann man setzen, wenn f ein positiver Factor ist,

$$X'' = f(x''(z'B-y'C)_2+y''(x'C-z'A)_2+z''(y'A-x'B)_2);$$

für $t=t_2$ wird demnach

$$X'' = f(A^2+B^2+C^2)$$

also positiv. Die Projection der Curve auf die Schmiegungsebene, welche als Ebene η betrachtet werden kann, geht also von Q aus nach der positiven Richtung der Hauptnormale hin, wie behauptet wurde.

Dorpat, October 1893.

Ueber Biegungen von *n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten.

(Von Herrn *Paul Stäckel* in Halle a. S.)

In einer Note: ***Zur Theorie des Gaussschen Krümmungsmaasses*** (dieses Journal Bd. 111 S. 205) hatte ich ein Verfahren zur Ermittelung von Biegungsinvarianten krummer Oberflächen angegeben, welches in einfacher Weise zum *Gauss*schen Krümmungsmaass führt und dessen Invarianz erkennen lässt. Dasselbe Verfahren kann auch ***bei den Biegungen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten*** angewandt werden, für welche das Quadrat des Linienelementes eine wesentlich positive quadratische Differentialform von n unabhängigen Veränderlichen ist. Ein Theil der Ergebnisse, zu welchen man so gelangt, ist bereits in Abhandlungen von ***Monro****) und ***Schur*****) enthalten, auf welche ich noch zurückkommen werde. Von den neuen Ergebnissen möchte ich einen sehr einfachen Beweis für die Invarianz des ***Riemannschen Krümmungsmaasses*** hervorheben.

Der eigentlichen Untersuchung schicke ich einige vorbereitende Sätze voraus.

Gegeben sei eine wesentlich positive quadratische Differentialform:

$$A = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dp_{\mathfrak{a}}\, dp_{\mathfrak{b}}; \tag{1.}$$

dabei sollen die Indices, wie stets im Folgenden die kleinen deutschen Buchstaben, die Werthe 1, 2, 3, ..., n durchlaufen. Sieht man A als das Quadrat des Linienelementes einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_n an, deren Biegungen zu untersuchen sind, so muss man vor Allem eine $(n+r)$-fach ausgedehnte *ebene* Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{n+r}$ haben, aus welcher sich die

---

*) On Flexure of Spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. IX, S. 171 (1878).

**) Ueber die Deformation der Räume constanten *Riemann*schen Krümmungsmaasses, Mathematische Annalen, Bd. 27 (1886).

M_n vermöge der $n+r$ Gleichungen:

$$z_\lambda = z_\lambda(p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n+r) \tag{2.}$$

ausscheiden lässt, vermöge deren nämlich das Quadrat des Linienelementes der $\mathfrak{M}_{n+r}$:

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{n+r} dz_\lambda^2 \tag{3.}$$

in die gegebene Differentialform A übergeführt wird. Denn wie die Biegungen krummer Oberflächen im Euklidischen Raume vor sich gehen, ebenso muss bei der Biegung höherer Mannigfaltigkeiten ein ebener Raum vorhanden sein, in welchem der Deformationsprocess vor sich geht.

Nach dem Vorgange von *Ricci**) sollen die M_n in *Klassen* getheilt werden, welche durch den *kleinsten* Werth von r charakterisirt sind, der ausreicht, damit die Gleichungen (2.) befriedigt werden können oder, was dasselbe ist, damit es möglich ist, dem Systeme der $\frac{1}{2}n(n+1)$ partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{n+r} \frac{\partial z_\lambda}{\partial p_a} \frac{\partial z_\lambda}{\partial p_b} = a_{ab} \tag{4.}$$

durch $n+r$ Functionen $z_1, z_2, \ldots, z_{n+r}$ zu genügen. Hieraus hat *Schlaefli***) geschlossen, dass r im Allgemeinen den Werth $\frac{1}{2}n(n-1)$ hat und nur für besondere Mannigfaltigkeiten kleiner wird, eine Behauptung, welche von *Ricci****), *Killing*†) und *Schur*†† wiederholt worden ist. Sie dadurch zu begründen, dass *„m+n partielle Differentialgleichungen für m+n Functionen stets Lösungen mit willkürlichen Functionen haben,“* scheint mir freilich nicht ganz ausreichend zu sein; einen strengen Beweis werde ich bei anderer Gelegenheit mittheilen.

Um das Verhalten einer M_n der Klasse r in der Umgebung eines Punktes $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n+r}^0$ oder $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ zu untersuchen, hat man $z_1, z_2, \ldots, z_{n+r}$ nach Potenzen von $p_1-p_1^0, \ldots, p_n-p_n^0$ zu entwickeln. Behält man von den Entwickelungen nur die Glieder *erster* Ordnung bei, so

---

*) Principî di una teoria delle forme differenziali quadratique. Annali di Matematica, serie 3, t. XII, S. 135 (1887).

**) Sugli spazî di curvatura costante, Annali di Matematica, serie 2, t. V, S. 190 (1871).

***) a. a. O. Seite 137.

†) *W. Killing,* Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig, 1885, Abschnitt II. § 12.

††) a. a. O. Seite 173.

stellen die $n+r$ linearen Gleichungen:

$$(5.) \qquad z_\lambda - z_\lambda^0 = \sum_\alpha z_\lambda^{(\alpha)}(p_\alpha - p_\alpha^0)$$

eine *ebene* n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ dar, welche die M_n in diesem Punkte *berührt.* Behält man auch die Glieder *zweiter* Ordnung bei:

$$(6.) \qquad z_\lambda - z_\lambda^0 = \sum_\alpha z_\lambda^{(\alpha)}(p_\alpha - p_\alpha^0) + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} z_\lambda^{(\alpha,\beta)}(p_\alpha - p_\alpha^0)(p_\beta - p_\beta^0),$$

so ergiebt sich eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche das Analogon des osculirenden Paraboloides der krummen Oberflächen ist; sie möge als *osculirende* P_n bezeichnet werden.

Die Darstellung der osculirenden P_n vereinfacht sich erheblich, wenn das Coordinatensystem in der $\mathfrak{M}_{n+r}$ auf besondere Art gewählt wird. Der Anfangspunkt sei der Punkt $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$. In der zugehörigen berührenden $\mathfrak{M}_n$ nehme man irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit diesem Anfangspunkte an und füge r weitere Coordinaten $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r)}$ so hinzu, dass

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n; \quad z^{(1)}, \quad z^{(2)}, \quad \ldots, \quad z^{(r)}$$

ein vollständiges System von $n+r$ rechtwinkligen Coordinaten der $\mathfrak{M}_{n+r}$ wird.

Dass dies stets möglich ist, zeigt folgende Ueberlegung. Werden in einer m-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit bei gegebenem Anfangspunkte $\mu < m$ zu einander rechtwinklige Coordinaten angenommen, so bestehen zwischen ihren $m\mu$ Richtungscosinus die $\frac{1}{2}\mu(\mu+1)$ Bedingungsgleichungen der Orthogonalität. Um das Coordinatensystem zu vervollständigen, hat man $m-\mu$ neue Axen so zu wählen, dass sämmtliche m Axen zu einander rechtwinklig sind, was die Erfüllung von weiteren

$$\tfrac{1}{2}m(m+1) - \tfrac{1}{2}\mu(\mu+1)$$

Bedingungsgleichungen erfordert, zu deren Befriedigung die $m(m-\mu)$ Richtungscosinus der neuen Axen zur Verfügung stehen. Der Unterschied zwischen der Anzahl der verfügbaren Grössen und der Anzahl der Gleichungen ist aber:

$$\tfrac{1}{2}(m-\mu)(m-\mu-1),$$

und daher ist die Erfüllbarkeit der Bedingungen nur an das Bestehen der Ungleichheit $\mu < m$ geknüpft.

Im vorliegenden Falle hat man aber

$$m = n+r, \quad \mu = n,$$

und es ist $r > 0$, weil die M_n als Element einer höheren Mannigfaltigkeit aufgefasst wird.

Bei Einführung der Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r)}$ werden die Gleichungen der berührenden $\mathfrak{M}_n$:

$$z^{(\nu)} = 0, \tag{7.}$$

und die der osculirenden P_n:

$$z^{(\nu)} = \tfrac{1}{2} \sum_{a,b} z_{ab}^{(\nu)} x_a x_b \qquad (z_{ab}^{(\nu)} = z_{ba}^{(\nu)}). \tag{8.}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich dazu über, das in meiner oben erwähnten Note auseinandergesetzte Verfahren auf die Biegungen der M_n anzuwenden, und bilde zunächst den Ausdruck für das Quadrat des *Linienelementes ds* der M_n, indem ich in den Ausdruck des Linienelementes der $\mathfrak{M}_{n+r}$:

$$\sum_a dx_a^2 + \sum_\nu dz^{(\nu)2} \tag{9.}$$

für die $z^{(\nu)}$ ihre Werthe in den x_a aus (8.) einsetze. Wird zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2} \sum_{c,d} \sum_\nu (z_{ac}^{(\nu)} z_{bd}^{(\nu)} + z_{bc}^{(\nu)} z_{ad}^{(\nu)}) x_c x_d = L_{ab} \tag{10.}$$

gesetzt, woraus

$$L_{ab} = L_{ba} \tag{11.}$$

folgt, so wird genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung:

$$ds^2 = \sum_a (1 + L_{aa} + \cdots) dx_a^2 + \sum_{a,b} (L_{ab} + \cdots) dx_a dx_b. \qquad (a \neq b) \tag{12.}$$

Jetzt denke ich mir in der $\mathfrak{M}_{n+r}$ ausser der M_n eine zweite n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_n mit dem Linienelemente $d\sigma$ gegeben und nehme an, dass M_n und M_n durch *Biegung* in einander übergeführt werden können, oder, was dasselbe ist, dass je zwei unendlich nahen Punkten der M_n mit dem Abstande ds zwei unendlich nahe Punkte der M_n mit einem Abstande $d\sigma$ entsprechen, welcher der Gleichung:

$$d\sigma = ds \tag{13.}$$

genügt. Wird dann, was stets möglich ist, durch eine Bewegung der M_n in der $\mathfrak{M}_{n+r}$ bewirkt, dass zwei bestimmte, einander entsprechende Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten — für die M_n sei es gerade der Anfangspunkt der Coordinaten — und die beiden zugehörigen berührenden $\mathfrak{M}_n$ zur Deckung gebracht werden, so lässt sich durch eine Drehung der M_n um den gemeinsamen Punkt auch noch erreichen, dass je zwei entsprechende von ihm

ausgehende Tangenten der M_n und M_n coincidiren. Es ist daher, wenn die Coordinaten des dem Punkte

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ z^{(1)},\ z^{(2)},\ \ldots,\ z^{(r)}$$

der M_n entsprechenden Punktes der M_n in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem mit

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n;\ \zeta^{(1)},\ \zeta^{(2)},\ \ldots,\ \zeta^{(r)}$$

bezeichnet werden, für die Umgebung des gemeinsamen Punktes in erster Annäherung:

(14.) $$\xi_a = x_a;\quad \zeta^{(\nu)} = z^{(\nu)} = 0.$$

Es wäre übrigens leicht, diese geometrische Beweisführung durch eine rein analytische zu ersetzen.

Während die berührenden $\mathfrak{M}_n$ der M_n und M_n im Anfangspunkte übereinstimmen, können die zugehörigen *osculirenden* P_n von einander abweichen, *aber es bestehen zwischen ihnen Beziehungen, welche ihren Ursprung darin haben, dass* M_n *und* M_n *durch Biegung in einander übergeführt werden können.* Um diese Beziehungen zu finden, hat man auch für die M_n das Quadrat des Linienelementes $d\sigma$ zu bilden und zu untersuchen, wann für die Umgebung des gemeinsamen Punktes die Gleichung:

(13.) $$ds = d\sigma$$

identisch besteht.

Wird für die M_n in ähnlicher Bezeichnung wie für die M_n:

(15.) $$\zeta^{(\nu)} = \tfrac{1}{2}\sum_{a,b}\zeta_{ab}^{(\nu)}\xi_a\xi_b \qquad (\zeta_{ab}^{(\nu)} = \zeta_{ba}^{(\nu)})$$

und:

(16.) $$\tfrac{1}{2}\sum_{c,d}\sum_{\nu}(\zeta_{ac}^{(\nu)}\zeta_{bd}^{(\nu)} + \zeta_{bc}^{(\nu)}\zeta_{ad}^{(\nu)})\xi_c\xi_d = \Lambda_{ab}$$

gesetzt, woraus wieder:

(17.) $$\Lambda_{ab} = \Lambda_{ba}$$

folgt, so ist genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung:

(18.) $$d\sigma^2 = \sum_a(1+\Lambda_{aa}+\cdots)d\xi_a^2 + \sum_{a,b}{}_{(a\neq b)}(\Lambda_{ab}+\cdots)d\xi_a d\xi_b.$$

Da dem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ entsprechen sollte, so sind auf der rechten Seite von (18.) die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufzufassen, wodurch $d\sigma^2$ in eine quadratische

Differentialform der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ übergeht, die vermöge der Gleichung

$$(13.) \qquad ds^2 = d\sigma^2$$

mit der durch (12.) gegebenen Differentialform ds^2 identisch sein muss. Das ist aber nur möglich, wenn die Coefficienten entsprechender Producte $dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b}$ auf beiden Seiten übereinstimmen, und hieraus entspringt ein System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen, zu dessen Aufstellung ich mich nunmehr wende.

Um $d\sigma^2$ zu transformiren, muss man die $\xi_\mathfrak{a}$ nach Potenzen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entwickeln und findet, da in erster Annäherung $\xi_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}$ war:

$$(19.) \qquad \xi_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{b} x_\mathfrak{c} + \tfrac{1}{6}\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}} x_\mathfrak{b} x_\mathfrak{c} x_\mathfrak{d} + \cdots.$$

Wenn noch festgesetzt wird, dass die Coefficienten $G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ und $H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}$ bei Vertauschung der unteren Indices denselben Werth behalten, so ist

$$(20.) \qquad d\xi_\mathfrak{a} = dx_\mathfrak{a} + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{c} dx_\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}} x_\mathfrak{c} x_\mathfrak{d} dx_\mathfrak{b} + \cdots,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, dass bei der Entwickelung der $\xi_\mathfrak{a}$ auch die Glieder *dritter* Dimension berücksichtigt werden müssen, weil nur so die Coefficienten der transformirten Differentialform $d\sigma^2$ genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung erhalten werden und dadurch eine Vergleichung mit den entsprechenden Coefficienten von ds^2 möglich wird, welche genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung berechnet worden waren.

Dieselbe Genauigkeit genügt aber auch bei $d\sigma^2$, und man braucht daher in den Ausdrücken $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$, welche homogene Functionen zweiten Grades der $\xi_\mathfrak{a}$ sind, überall nur $\xi_\mathfrak{a}$ durch $x_\mathfrak{a}$ zu ersetzen, wodurch $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in:

$$(21.) \qquad \overline{A}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\sum_{\nu}(\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} + \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}) x_\mathfrak{c} x_\mathfrak{d}$$

übergeht. Da mithin in $d\sigma^2$ die Coefficienten der Producte $d\xi_\mathfrak{a} d\xi_\mathfrak{b}$, in denen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ ist, homogene Functionen zweiten Grades der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, so darf man, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ ist, bei der Transformation einfach $dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b}$ statt $d\xi_\mathfrak{a} d\xi_\mathfrak{b}$ setzen. Dagegen muss man bei den Grössen $d\xi^2_\mathfrak{a}$ die Glieder zweiter Ordnung hinzunehmen und hat demgemäss statt $d\xi^2_\mathfrak{a}$ zu substituiren:

$$dx^2_\mathfrak{a} + 2\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{c} dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b} + (\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{c} dx_\mathfrak{b})^2 + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}} x_\mathfrak{c} x_\mathfrak{d} dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b}.$$

Auf diese Weise erhält man schliesslich genau bis auf die Glieder zweiter Ordnung:

$$(22.) \qquad \begin{cases} d\sigma^2 = \sum_{\mathfrak{a}}(1 + \overline{A}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}} + \cdots) dx^2_\mathfrak{a} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\ (\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b})}(\overline{A}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \cdots) dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b} \\ \quad + 2\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{c} dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b} + (\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} G^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} x_\mathfrak{c} dx_\mathfrak{b})^2 + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}} x_\mathfrak{c} x_\mathfrak{d} dx_\mathfrak{a} dx_\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Vergleicht man (12.) und (22.), so ergiebt sich, dass in den Coefficienten von ds^2 ausser den constanten Grössen Eins nur Glieder zweiter und höherer Ordnung vorkommen, während in $d\sigma^2$ ausser denselben constanten Gliedern Eins Glieder erster, zweiter u. s. w. Ordnung auftreten. Daher müssen die linearen Glieder in den Coefficienten von $d\sigma^2$:

$$\sum_c (G_{bc}^{(a)} + G_{ac}^{(b)}) x_c$$

identisch verschwinden, mithin die Grössen $G_{bc}^{(a)}$ den Gleichungen:

$$G_{bc}^{(a)} + G_{ac}^{(b)} = 0 \tag{23.}$$

genügen.

Man hat daher:

$$G_{bc}^{(a)} + G_{ac}^{(b)} = 0, \tag{23.}$$

$$G_{cb}^{(a)} + G_{ab}^{(c)} = 0, \tag{24.}$$

$$G_{ca}^{(b)} + G_{ba}^{(c)} = 0, \tag{25.}$$

folglich müssen alle Grössen $G_{bc}^{(a)}$ identisch verschwinden. Sollen also die linearen Glieder aus den Coefficienten von $d\sigma^2$ herausfallen, so muss

$$\xi_a = x_a + \tfrac{1}{6} \sum_{b,c,d} H_{bcd}^{(a)} x_b x_c x_d \tag{26.}$$

sein.

Legt man diese Entwickelungen der ξ_a zu Grunde, so ergiebt die Vergleichung der Glieder zweiter Ordnung in (12.) und (22.):

$$L_{ab} - \bar{A}_{ab} = \sum_{c,d} (H_{bcd}^{(a)} + H_{acd}^{(b)}) x_c x_d. \tag{27.}$$

Aus jeder der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (27.) erhält man aber wiederum $\frac{1}{2}n(n+1)$ Relationen, weil die Coefficienten der einzelnen Producte $x_c x_d$ auf beiden Seiten übereinstimmen müssen, und findet so das System von $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ Gleichungen:

$$\sum_\nu (z_{ac}^{(\nu)} z_{bd}^{(\nu)} - \zeta_{ac}^{(\nu)} \zeta_{bd}^{(\nu)}) + \sum_\nu (z_{bc}^{(\nu)} z_{ad}^{(\nu)} - \zeta_{bc}^{(\nu)} \zeta_{ad}^{(\nu)}) = H_{bcd}^{(a)} + H_{acd}^{(b)} \tag{H.}$$

zwischen den $rn(n+1)$ Grössen $z_{ab}^{(\nu)}$ und $\zeta_{ab}^{(\nu)}$, die für die osculirenden P_n der M_n und M_n in dem gemeinsamen Punkte charakteristisch sind, und den $\frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$ Coefficienten $H_{bcd}^{(a)}$, welche bei der Entwickelung der Grössen ξ_a nach Potenzen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auftraten. Da nun

$$\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \tfrac{1}{6}n^2(n+1)(n+2) = \tfrac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

ist, so wird man vermuthen, dass die Gleichungen (H.) im Allgemeinen nur dann bestehen können, wenn ein gewisses System von $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ Relationen

zwischen den $rn(n+1)$ Grössen $z_{ab}^{(\nu)}$ und $\zeta_{ab}^{(\nu)}$ identisch erfüllt ist. Dass es sich in der That so verhält, lässt sich folgendermassen darthun.

Ich setze zur Abkürzung:

$$(28.) \qquad \sum_{\nu}(z_{ac}^{(\nu)}z_{bd}^{(\nu)}-\zeta_{ac}^{(\nu)}\zeta_{bd}^{(\nu)}) = (ac)(bd);$$

diese Bezeichnung soll andeuten, dass der Werth der linken Seite sowohl bei der Vertauschung von a mit c oder b mit d, als auch bei der Vertauschung von ac mit bd unverändert bleibt.

Dann gelten für die Grössen $H_{bcd}^{(a)}$ die Gleichungen:

$$(29.) \quad \begin{cases} H_{bcd}^{(a)}+H_{acd}^{(b)} = (ac)(bd)+(ad)(bc), \\ H_{cbd}^{(a)}+H_{abd}^{(c)} = (ab)(cd)+(ad)(bc), \\ H_{dbc}^{(a)}+H_{abc}^{(d)} = (ab)(cd)+(ac)(bd), \end{cases}$$

und

$$(30.) \quad \begin{cases} H_{cad}^{(b)}+H_{bad}^{(c)} = (ab)(cd)+(ac)(bd), \\ H_{dab}^{(c)}+H_{cab}^{(d)} = (ac)(bd)+(ad)(bc), \\ H_{dac}^{(b)}+H_{bac}^{(d)} = (ab)(cd)+(ad)(bc). \end{cases}$$

Addirt man die Gleichungen (29.), multiplicirt die Summe mit 2, subtrahirt die Summe der Gleichungen (30.) und dividirt durch 6, so erhält man:

$$H_{bcd}^{(a)} = \tfrac{1}{3}[(ab)(cd)+(ac)(bd)+(ad)(bc)].$$

Daher sind alle 24 Grössen $H_{bcd}^{(a)}$ einander gleich, welche durch beliebige Vertauschung der vier Indices a, b, c, d entstehen, und es muss daher auch nach der dritten Gleichung von (29.) $(ab)(cd)+(ac)(bd)$ bei allen diesen Vertauschungen denselben Werth behalten. Mithin sind auch bei $(ab)(cd)$ selbst alle 24 Permutationen gestattet, und hieraus folgt endlich, dass alle sechs Relationen (29.) und (30.) mit der einen:

$$(H^*.) \qquad H_{bcd}^{(a)} = (ab)(cd)$$

gleichbedeutend sein müssen.

Sollen also die $\frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$ *Grössen* $H_{bcd}^{(a)}$ den $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ *Gleichungen* (H.) *genügen, so ist nothwendig*

$$H_{bcd}^{(a)} = (ab)(cd),$$

und die Grössen $H_{bcd}^{(a)}$ *bleiben bei allen Vertauschungen der vier Indices* a, b, c, d *unverändert.*

Ehe ich auf die Bedeutung der so entstehenden Gleichungen zwischen den Ausdrücken $(ab)(cd)$ näher eingehe, möchte ich eine interessante Fol-

gerung aus den Gleichungen (H*.) ziehen. Bildet man nämlich die ganze Function vierter Dimension:

$$(31.) \qquad H = \tfrac{1}{24} \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} (\mathfrak{ab})(\mathfrak{cd}) x_{\mathfrak{a}} x_{\mathfrak{b}} x_{\mathfrak{c}} x_{\mathfrak{d}},$$

deren Coefficienten bei Vertauschung der Indices $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ unverändert bleiben, so ist:

$$(32.) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_{\mathfrak{a}}} = \tfrac{1}{6} \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} (\mathfrak{ab})(\mathfrak{cd}) x_{\mathfrak{b}} x_{\mathfrak{c}} x_{\mathfrak{d}} = \tfrac{1}{6} \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}} H^{(\mathfrak{a})}_{\mathfrak{bcd}} x_{\mathfrak{b}} x_{\mathfrak{c}} x_{\mathfrak{d}},$$

folglich lassen sich die Entwickelungen der Grössen $\xi_{\mathfrak{a}}$ nach Potenzen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genau bis auf Grössen dritter Ordnung in der einfachen Gestalt:

$$(33.) \qquad \xi_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}} + \frac{\partial H}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \cdots$$

darstellen.

Es war:

$$(28.) \qquad (\mathfrak{ab})(\mathfrak{cd}) = \sum_{\nu} (z^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}} z^{(\nu)}_{\mathfrak{cd}} - \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}} \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{cd}}).$$

Jene Bedingungsgleichungen für das Bestehen des Systemes (H.) ***lassen sich daher in der Form schreiben:***

$$(J.) \qquad \sum_{\nu} (z^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}} z^{(\nu)}_{\mathfrak{cd}} - z^{(\nu)}_{\mathfrak{ac}} z^{(\nu)}_{\mathfrak{bd}}) = \sum_{\nu} (\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}} \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{cd}} - \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{ac}} \zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{bd}}),$$

sie entsprechen also genau der Gleichung

$$z_{11} z_{22} - z_{12}^2 = \zeta_{11} \zeta_{22} - \zeta_{12}^2,$$

welche die Invarianz des Gaussschen Krümmungsmaasses ausdrückt.

Man erkennt leicht, dass die Relationen (J.) nicht unabhängig von einander bestehen, und dass sie im Allgemeinen genau äquivalent

$$\tfrac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$$

Gleichungen zwischen den Grössen $z^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}}$ und $\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}}$ sind. Sieht man also die M_n und damit die $z^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}}$ als gegeben an, so müssen die $\frac{1}{2} r n (n+1)$ Grössen $\zeta^{(\nu)}_{\mathfrak{ab}}$ der Biegungsmannigfaltigkeit M_n den $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$ Gleichungen (J.) genügen.

Die Relationen (J.) finden sich schon in der oben erwähnten Abhandlung von ***Schur,*** welcher zu ihnen gelangte, indem er vom ***Riemann***schen Krümmungsmaasse der M_n ausging.

Schur verfährt etwa so. Gegeben sei eine quadratische Differentialform:

$$A = \sum_{ab} a_{ab}\, dp_a\, dp_b.$$

Aus dem Systeme der Coefficienten a_{ab} bilde man das reciproke System der Grössen a'_{ab}, welche den Gleichungen:

$$(34.) \qquad \sum_{a} a_{ab}\, a'_{ac} = \delta_{bc} \qquad \left(\delta_{bc} = \begin{cases} 1, & b = c \\ 0, & b \neq c \end{cases}\right)$$

genügen, und das System der Ausdrücke:

$$(35.) \qquad \begin{bmatrix} a\,b \\ c \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ac}}{\partial p_b} + \frac{\partial a_{bc}}{\partial p_a} - \frac{\partial a_{ab}}{\partial p_c}\right).$$

Führt man noch ein:

$$(36.) \quad \begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial p_b}\begin{bmatrix} a\,c \\ b \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_c}\begin{bmatrix} a\,d \\ b \end{bmatrix} + \sum_{e,f} a'_{ef}\left(\begin{bmatrix} a\,d \\ e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b\,c \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a\,c \\ e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b\,d \\ f \end{bmatrix}\right),$$

so ist das ***Riemannsche Krümmungsmaass*** K im Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$(37.) \quad K = \frac{\sum_{a,b,c,d} \begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix} (dp_a \delta p_b - dp_b \delta p_a)(dp_b \delta p_c - dp_c \delta p_b)}{\sum_{a,b,c,d} (a_{ab} a_{cd} - a_{bd} a_{ac})(dp_a \delta p_b - dp_b \delta p_a)(dp_b \delta p_c - dp_c \delta p_b)}.$$

Wählt man als unabhängige Veränderliche im besonderen die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wird

$$(12.) \qquad A = \sum_{a} (1 + L_{aa} + \cdots)\, dx_a^2 + \sum_{a,b\ (a \neq b)} (L_{ab} + \cdots)\, dx_a\, dx_b,$$

und da die Ausdrücke L_{ab} homogene Functionen zweiter Dimension von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, so beginnt die Entwickelung der Grössen $\begin{bmatrix} a\,b \\ c \end{bmatrix}$ mit Gliedern erster Ordnung. Für den Punkt $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ reducirt sich also das System der Grössen a_{ab} auf das Einheitsystem δ_{ab}, welches sich selbst reciprok ist, und die Grössen $\begin{bmatrix} a\,b \\ c \end{bmatrix}$ verschwinden. Daher genügt es, bei der Berechnung von $\begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix}$ die beiden ersten Terme:

$$\frac{\partial}{\partial p_b}\begin{bmatrix} a\,c \\ b \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial p_c}\begin{bmatrix} a\,d \\ b \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{ad}}{\partial x_b \partial x_c} + \frac{\partial^2 a_{bc}}{\partial x_a \partial x_d} - \frac{\partial^2 a_{ac}}{\partial x_b \partial x_d} - \frac{\partial^2 a_{bd}}{\partial x_a \partial x_c}\right)$$

zu berücksichtigen. Nun wird für den betrachteten Punkt:

$$(38.) \qquad \frac{\partial^2 a_{ab}}{\partial p_c \partial p_b} = \sum_{\nu} \left(z_{ac}^{(\nu)} z_{bd}^{(\nu)} + z_{bc}^{(\nu)} z_{ad}^{(\nu)}\right),$$

folglich:

$$\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix} = \sum_{\nu} (z_{ac}^{(\nu)} z_{bd}^{(\nu)} - z_{bc}^{(\nu)} z_{ad}^{(\nu)}), \tag{39.}$$

und das zugehörige *Riemann*sche *Krümmungsmaass* K_0 ist:

$$K_0 = \frac{\sum_{a,b,c,d} \sum_{\nu} (z_{ac}^{(\nu)} z_{bd}^{(\nu)} - z_{bc}^{(\nu)} z_{ad}^{(\nu)})(dx_a \delta x_b - dx_b \delta x_a)(dx_b \delta x_c - dx_c \delta x_b)}{\sum_{a,b} (dx_a \delta x_b - dx_b \delta x_a)^2}. \tag{40.}$$

Für den entsprechenden Punkt der M_n wird nun

$$\mathsf{K}_0 = \frac{\sum_{a,b,c,d} \sum_{\nu} (\zeta_{ac}^{(\nu)} \zeta_{bd}^{(\nu)} - \zeta_{bc}^{(\nu)} \zeta_{ad}^{(\nu)})(d\xi_a \delta\xi_b - d\xi_b \delta\xi_a)(d\xi_b \delta\xi_c - d\xi_c \delta\xi_b)}{\sum_{a,b} (d\xi_a \delta\xi_b - d\xi_b \delta\xi_a)^2}. \tag{41.}$$

Nun ist nach (14.) in der Nähe des gemeinsamen Punktes:

$$dx_a = d\xi_a, \quad \delta x_a = \delta\xi_a,$$

folglich unterscheiden sich K_0 und K_0 lediglich durch die Coefficienten der Zähler. ***Jetzt erschliesst Schur aus der Invarianz des Riemannschen Krümmungsmaasses,*** dass entsprechende Coefficienten der beiden Zähler einander gleich sein müssen, ***dass also zwischen den Grössen $z_{ab}^{(\nu)}$ und $\zeta_{ab}^{(\nu)}$ die Relationen*** (J.) ***bestehen. Hat man aber, wie es oben geschehen ist, die Relationen*** (J.) ***direct bewiesen, so folgt umgekehrt aus ihrem identischen Bestehen, dass***

$$K_0 = \mathsf{K}_0 \tag{42.}$$

sein muss, wodurch die Invarianz des Riemannschen Krümmungsmaasses in einfachster Weise dargethan ist*).

Auch in der schon erwähnten Abhandlung von ***Monro*** finden sich die $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ Relationen (J.) zwischen den $\frac{1}{2}rn(n+1)$ Grössen $z_{ab}^{(\nu)}$ und den $\frac{1}{2}rn(n+1)$ Grössen $\zeta_{ab}^{(\nu)}$. ***Monro*** zieht aus ihnen einen Schluss, den ich nicht für berechtigt halten kann, er sagt nämlich, Biegung einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $r$ter Klasse sei mit

$$N = \tfrac{1}{2}rn(n+1) - \tfrac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

---

*) Für die M_n der Klasse $r = 1$ lässt sich aus den Relationen (J.) auch die Invarianz des *Kronecker*schen Krümmungsmaasses (beziehungsweise seines Quadrates) erschliessen, vgl. ***Schur,*** a. a. O. Seite 566.

„Graden der Freiheit" möglich*). Er meint damit, dass in der osculirenden P_n der Biegungsmannigfaltigkeit M_n genau N der Grössen $\zeta_{ab}^{(r)}$ willkürlich bleiben. Dabei wird jedoch übersehen, dass das Coordinatensystem der $x_1, x_2, \ldots, x_n; z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r)}$ noch in gewisser Weise willkürlich ist. Einer Coordinatentransformation entspricht aber eine blosse Bewegung, keine wirkliche Biegung. Zum Beispiel wird für $n = 2$ und $r = 1$:

$$N = 2,$$

während doch die Gleichung zwischen den Hauptkrümmungsradien in entsprechenden Punkten

$$r_1 r_2 = \varrho_1 \varrho_2$$

zeigt, dass zu einem osculirenden Paraboloide nur ∞^1 osculirende Biegungsparaboloide gehören.

Der *Grad der Freiheit* muss daher anders bestimmt werden, und zwar so: Ist die berührende $\mathfrak{M}_n$ gegeben, in welcher die Axen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liegen sollen, so bleiben noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ ihrer Richtungscosinus willkürlich. Von den Richtungscosinus der $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r)}$ aber kann man noch über $\frac{1}{2}r(r-1)$ verfügen, so dass im ganzen

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)+\tfrac{1}{2}r(r-1)$$

Grössen beliebig bleiben. Um diese Zahl ist also N zu vermindern, damit man die Drehungen der osculirenden Biegungs-P_n um den gemeinsamen Punkt eliminirt.

Mithin wird der „Grad der Freiheit":

$$(43.) \qquad G_{n,r} = \tfrac{1}{2}rn(n+1)-\tfrac{1}{1\,2}n^2(n^2-1)-\tfrac{1}{2}n(n-1)-\tfrac{1}{2}r(r-1).$$

Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass bei besonderer Wahl der Grössen $z_{ab}^{(r)}$ die Relationen (J.) weniger als $\frac{1}{1\,2}n^2(n^2-1)$ Gleichungen äquivalent werden können, und dass daher die Zahl $G_{n,r}$ das *Minimum* der Anzahl der willkürlichen Grössen $z_{ab}^{(r)}$ bedeutet. Man darf daher nur sagen, dass $G_{n,r}$ *„im allgemeinen"* den Grad der Freiheit angiebt. Weiteres über diesen wichtigen Punkt findet man in den oben citirten Abhandlungen von *Killing* und *Schur*.

Die folgende kleine Tabelle enthält die Werthe von $G_{n,r}$ für $n = 2$, 3 und 4. Dabei sind negative Werthe durch Null ersetzt worden, da sich die Relation (J.) stets durch

$$z_{ab}^{(r)} = \zeta_{ab}^{(r)}$$

*) „Space of n dimensions admits in general of pure flexion in space of $n+n'$ dimensions with not more than $\frac{1}{2}n(n+1)(n'-\frac{1}{6}n(n-1))$ degrees of freedom."

befriedigen lassen. Es ist für:

$n = 2, \quad r = 1,$
$\quad\quad G = 1;$

$n = 3, \quad r = 1, \quad r = 2, \quad r = 3,$
$\quad\quad G = 0, \quad G = 2, \quad G = 6;$

$n = 4, \quad r = 1, \quad r = 2, \quad r = 3, \quad r = 4, \quad r = 5, \quad r = 6,$
$\quad\quad G = 0, \quad G = 0, \quad G = 1, \quad G = 8, \quad G = 14, \quad G = 19.$

Es ist klar, dass sich neue Biegungsinvarianten ergeben, wenn man, wie ich es für $n = 2$ gethan habe, bei den Reihenentwickelungen auch die Glieder dritter, vierter u. s. w. Ordnung berücksichtigt. Die Relationen, welche sich auf diese Weise ergeben, sind jedoch so verwickelt, dass mir ihre Mittheilung gegenwärtig noch unthunlich erscheint.

Ebenso will ich hier nur hinweisen auf eine interessante Aufgabe, welche sich bei Vergleichung der Invarianten (J.) mit dem *Gauss*'schen Krümmungsmaasse ergiebt. Ist nämlich das Quadrat des Linienelementes ds einer krummen Oberfläche:

$$ds^2 = a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1dp_2 + a_{22}dp_2^2$$

gegeben, so lässt sich das Krümmungsmaass durch die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} nebst ihren Ableitungen so ausdrücken, *dass es als Invariante der Form gegenüber den Transformationen:*

$$p_1 = f_1(q_1, q_2), \quad p_2 = f_2(q_1, q_2)$$

erscheint. Es bleibt daher zu wünschen übrig, dass auch für die allgemeineren Biegungsinvarianten (J.) eine entsprechende Darstellung gefunden wird; werthvolle Hülfsmittel für die Lösung dieser Aufgabe dürfte die *Lie'sche Gruppentheorie* liefern. Die Ermittelung solcher *invariabler Functionen* gewinnt noch dadurch an Wichtigkeit, dass alle *Biegungscovarianten einer quadratischen Differentialform in n Veränderlichen,* wie ich im vorhergehenden Hefte dieses Journals gezeigt habe, aus n von einander unabhängigen mittelst der *Beltrami*schen Symbole Δ und Θ erhalten werden können.

Berlin, September 1893.

Ueber die von *Poincaré* gegebene Erweiterung des *Cauchy*schen Satzes von der Existenz der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungsysteme.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Poincaré hat in seiner Arbeit: sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique den *Cauchy*schen Satz von der Existenz der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungsysteme dahin erweitert, dass, wenn die Differentialgleichungen vorgelegt sind

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu),$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu),$$

worin f, f_1, f_2, welche ausser von den abhängigen Variabeln noch von einem beliebigen Parameter μ abhängen, nach steigenden Potenzen von x, y, z, μ entwickelbar sind, dasjenige Integralsystem, welches für $t = 0$ die Werthe x_0, y_0, z_0 annehmen soll, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von μ, x_0, y_0, z_0, wie gross auch t sein mag, entwickelt werden kann, vorausgesetzt, dass die vier Grössen μ, x_0, y_0, z_0 hinreichend klein sind — mit Ausnahme des Falles, dass die den Werthen $\mu = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ entsprechenden Integralsysteme bei ihrer Fortsetzung durch ein singuläres Werthesystem gehen; endlich sind die Elemente des Integralsystems, welche für $t = t_1$ nach Potenzen von μ, x_0, y_0, z_0 entwickelbar sind, auch wenn $t_1 + \tau$ für t_1 gesetzt wird, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von μ, x_0, y_0, z_0 und τ entwickelbar, vorausgesetzt, dass diese Grössen hinreichend klein sind.

Die nachfolgenden Bemerkungen sollen die entsprechende Erweiterung des *Cauchy*schen Satzes von der Existenz der Integrale partieller

Differentialgleichungsysteme liefern, und zum Zwecke einer einheitlicheren Beweismethode mag zuerst die Entwickelung des oben erwähnten *Poincaré*schen Satzes für ein gewöhnliches Differentialgleichungsystem beliebiger Klasse vorausgeschickt werden.

Wird in dem totalen Differentialgleichungsystem

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho), \end{cases}$$

in welchem $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ Parameter bedeuten, und $f_1, \ldots, f_n$ in der Umgebung der Nullpunkte der Grössen $x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen dieser Grössen entwickelbare Functionen sein sollen, dasjenige Integralsystem betrachtet, welches für $x = 0$ die Werthe $\eta_1, \ldots, \eta_n$ annimmt, und transformirt man zur Untersuchung der Natur dieser Integrale das System (1.) durch die Substitutionen

$$(2.)\qquad y_1 - \eta_1 = Y_1,\quad y_2 - \eta_2 = Y_2,\quad \ldots,\quad y_n - \eta_n = Y_n$$

in das Differentialgleichungsystem

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = f_1(x,\ Y_1+\eta_1,\ \ldots,\ Y_n+\eta_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dY_n}{dx} = f_n(x,\ Y_1+\eta_1,\ \ldots,\ Y_n+\eta_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho), \end{cases}$$

so werden zunächst für hinreichend kleine Werthe von $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen nach Potenzen von $x, Y_1, \ldots, Y_n, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar sein, und dann wird nach dem Satze von der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungsysteme, indem x und die Parameter $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ als unabhängige Variable betrachtet werden, ein Integralsystem für $Y_1, \ldots, Y_n$ existiren, welches mit $x = 0$ verschwindet und nach Potenzen von $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ in der Umgebung der Nullpunkte entwickelbar ist. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Es giebt für das Differentialgleichungsystem (1.), *dessen rechte Seiten nach Potenzen von* $x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ *entwickelbar sind, ein Integralsystem, welches für* $x = 0$ *beliebige n Werthe* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *annimmt, und für*

hinreichend kleine Werthe von $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen dieser Grössen entwickelbar ist.***

Aber es soll gezeigt werden, dass nicht bloss für hinreichend kleine x sondern von einem sogleich zu erörternden Ausnahmefalle abgesehen auch für jedes x die Entwickelbarkeit der bezeichneten Integralelemente nach Potenzen von $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ erhalten bleibt.

Sei nämlich ein bestimmtes Werthesystem $\eta_1, \ldots, \eta_n$ aus den bezeichneten Bereichen gewählt, so dass das Integralsystem von (1.) dadurch bestimmt ist, und sei der für eine bestimmte Wahl der aus den möglichen Bereichen der $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ genommenen Werthe sich für x ergebende Convergenzradius R, so werde innerhalb des zu R gehörenden Convergenzkreises ein beliebiger, aber bestimmter Punkt x_1 ausgewählt, und wenn die Integralfunctionen durch

$$(4.)\quad y_1 = \omega_1(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \ \ldots, \ y_n = \omega_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)$$

bezeichnet werden, worin $\omega_1, \ldots, \omega_n$ nach Potenzen von $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar waren, das Differentialgleichungsystem (1.) durch die Substitutionen

$$(5.)\quad \begin{cases} x - x_1 = X, & y_1 - \omega_1(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = Y_1, \ \ldots, \\ & y_n - \omega_n(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = Y_n \end{cases}$$

in das Differentialgleichungsystem

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dX} = f_1(X + x_1, \ Y_1 + \omega_1(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \\ \qquad\qquad Y_n + \omega_n(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0), \ \mu_1, \ \ldots, \ \mu_\varrho), \\ \cdots\cdots\cdots\

Um den oben ausgesprochenen Satz auf das Differentialgleichungsystem (6.) anwenden zu können, müssen $f_1, \ldots, f_n$ in (6.) nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $X, Y_1, \ldots, Y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar sein; bezeichnet man aber

(8.) $\omega_1(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Omega_1, \ldots, \omega_n(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Omega_n$

und nimmt an, dass die Functionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \quad \ldots, \quad f_n(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)$$

in der Umgebung der Werthe

(9.) $$x_1, \quad \Omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_n, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0$$

innerhalb gewisser Bereiche nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$x - x_1, \quad y_1 - \Omega_1, \quad \ldots, \quad y_n - \Omega_n, \quad \mu_1, \quad \ldots, \quad \mu_\varrho$$

entwickelbar sind*), so werden auch die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ auf den rechten Seiten der Gleichungen (6.) in der Umgebung von $X = 0, Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0$ nach Potenzen von $X, Y_1, \ldots, Y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ sich entwickeln lassen, und somit nach dem oben aufgestellten Satze das Integralsystem der Differentialgleichungen (6.), welches für $X = 0$ die durch (7.) gegebenen Werthe $\overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_n$ annimmt, für hinreichend kleine $X, \overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ oder, was nach der Form der Werthe $\overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_n$ zu sagen genügt, für hinreichend kleine Werthe von $X, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $X, \overline{\Omega}_1, \ldots, \overline{\Omega}_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar sein; beachtet man nun, dass $\omega_\lambda(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)$ also auch $\overline{\Omega}_\lambda$ für hinreichend kleine Werthe von $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ nach Potenzen dieser Grössen entwickelt werden konnte, und geht vermöge der Substitutionen (5.) zu dem ursprünglichen Differentialgleichungsystem (1.) zurück, so ergiebt sich das folgende Resultat:

Sind in dem Differentialgleichungsystem (1.) ***die rechten Seiten nach Potenzen von*** $x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***entwickelbar, so giebt es stets ein***

---

*) Es ist wohl zu beachten, dass nicht angenommen ist, dass die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ in der Umgebung von x_1 und den dazugehörigen Werthen von $y_1, \ldots, y_n$ also $\omega_1(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \ldots, \omega_n(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)$ holomorph sind, sondern in der Umgebung derjenigen Werthe von $y_1, \ldots, y_n$, die sich aus den gefundenen Integralen ergeben, wenn $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \mu_1 = \cdots = \mu_\varrho$ den Werth Null annehmen, oder der Fortsetzungen derjenigen Integrale, welche für $\mu_1 = \cdots = \mu_\varrho = 0$ aus den gegebenen Differentialgleichungen hergeleitet werden, wenn dieselben den Bedingungen unterworfen werden, sämmtlich für $x = 0$ zu verschwinden.

Integralsystem

$y_1 = \omega_1(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \ldots, y_n = \omega_n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho),$

welches für $x = 0$ *einen beliebigen Werthecomplex* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *annimmt und für hinreichend kleine Werthe von* $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ *nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen dieser Grössen entwickelbar ist, und diese Integralelemente besitzen um einen beliebigen Punkt* x_1 *des zu* x *gehörigen Convergenzbereiches Fortsetzungen*

$y_1 = \psi_1(x-x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \ldots, y_n = \psi_n(x-x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho),$

welche nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $x-x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ *entwickelbar sind, vorausgesetzt, dass die Functionen* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *in der Umgebung der Werthe*

$$x = x_1, \quad y_1 = \omega_1(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Omega_1, \quad \ldots,$$
$$y_n = \omega_n(x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Omega_n, \quad \mu_1 = 0, \quad \ldots, \quad \mu_\varrho = 0$$

innerhalb gewisser Bereiche nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$x-x_1, \quad y_1-\Omega_1, \quad \ldots, \quad y_n-\Omega_n, \quad \mu_1, \quad \ldots, \quad \mu_\varrho$$

sich entwickeln lassen, oder dass diese Werthe kein singuläres Werthesystem der Functionen $f_1, \ldots, f_n$ *bilden, oder noch anders ausgedrückt, wenn* x_1 *und die im Punkte* x_1 *sich ergebenden Werthe derjenigen Integrale des durch Nullsetzen der* $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ *aus dem gegebenen* (1.) *hergeleiteten Differentialgleichungsystems, welche mit* $x = 0$ *sämmtlich selbst verschwinden, kein singuläres Werthesystem darstellen, und man erhält die Werthe der Integralelemente für irgend einen Werth* x_2 *der bezeichneten Umgebung von* x_1 *in der Form*

$$y_1 = \psi_1(x_2-x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_n), \quad \ldots,$$
$$y_n = \psi_n(x_2-x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Bilden nun wieder, wenn

$$\psi_1(x_2-x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Psi_1, \quad \ldots, \quad \psi_n(x_2-x_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = \Psi_n$$

gesetzt wird, die Werthe

$$x_2, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots, \quad \Psi_n, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0$$

kein singuläres Werthesystem der Functionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \quad \ldots, \quad f_n(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho),$$

so werden sich die Integralelemente ebenso in der Umgebung von x_2 nach Potenzreihen von $x-x_2, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelt fortsetzen lassen, und *man wird somit unter der Voraussetzung, dass, während* x *von* 0 *bis* ξ

läuft, die Integralelemente nie durch ein singuläres Werthesystem von $f_1, \ldots, f_n$ ***gehen, die Integralelemente selbst für jeden Werth von*** x ***zwischen*** 0 ***und*** ξ ***für hinreichend kleine Werthe von*** $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen dieser Grössen entwickeln können.***

Liegen die Radien der um 0, x_1, x_2, ... gelegten Convergenzkreise, deren Mittelpunkte nie singuläre Werthesysteme der Functionen $f_1, \ldots, f_n$ bilden sollen, stets über einer bestimmt angebbaren endlichen Grösse, so ist klar, dass man mit Hülfe der angegebenen Fortsetzungen die ganze x-Ebene durchlaufen kann, und dass dann für jedes x — die singulären Werthesysteme ausgeschlossen — die Integralelemente nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar sind, falls letztere Grössen hinreichend klein angenommen werden.

Hat man für einen bestimmten Werth x_1 von x diejenigen Integralelemente, welche für $x = 0$ die Werthe $\eta_1, \ldots, \eta_n$ annehmen, in der Form ermittelt

$$(10.)\quad y_1 = \omega_1(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \ldots, y_n = \omega_n(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho),$$

worin nach dem obigen Satze $\omega_1, \ldots, \omega_n$ nach Potenzen von $\eta_1, \ldots, \eta_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ entwickelbar sind, so ist leicht zu sehen, dass ***die Werthe der Integralelemente für benachbarte Werthe von*** x, ***die wir durch*** $x_1+\xi$ ***darstellen wollen, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von*** ξ, $\eta_1, \ldots, \eta_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***für hinreichend kleine Werthe dieser Grössen entwickelbar sind.*** Setzt man nämlich

$$(11.)\qquad y_1 = Y_1+\eta_1, \quad \ldots, \quad y_n = Y_n+\eta_n, \quad x = X\frac{x_1+\xi}{x_1},$$

so geht das Differentialgleichungsystem in

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{dX} = \left(1+\dfrac{\xi}{x_1}\right) f_1\left(X\dfrac{x_1+\xi}{x_1},\ Y_1+\eta_1,\ \ldots,\ Y_n+\eta_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho\right), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dY_n}{dX} = \left(1+\dfrac{\xi}{x_1}\right) f_n\left(X\dfrac{x_1+\xi}{x_1},\ Y_1+\eta_1,\ \ldots,\ Y_n+\eta_n,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho\right) \end{cases}$$

über, und es lassen sich der für $f_1, \ldots, f_n$ gemachten Voraussetzung zufolge die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen für hinreichend kleine Werthe der Grössen $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi$ nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $X, Y_1, \ldots, Y_n, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi$ entwickeln, so dass dem oben bewiesenen Satze zufolge diejenigen Integral-

elemente des Differentialgleichungsystems (12.)

$$(13.)\quad \begin{cases} Y_1 = \Omega_1(X, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi), \ldots, \\ Y_n = \Omega_n(X, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi), \end{cases}$$

welche für $X=0$ selbst verschwinden, nach Potenzen von $\eta_1, \ldots, \eta_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$, ξ entwickelbar sind, und die Eigenschaft der Entwickelbarkeit nach diesen Parametern bleibt bestehen, wenn man $X = x_1$ setzt, indem für $\eta_1 = \cdots = \eta_n = \mu_1 = \cdots = \mu_\varrho = \xi = 0$ die rechten Seiten von (12.) in die von (1.) übergehen und von letzterem angenommen wurde, dass die dem x_1 entsprechenden Werthe kein singuläres Werthesystem bilden; da aber nach (10.), (11.), (13.)

$$(14.)\quad \begin{cases} \omega_1(x_1+\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho) = \Omega_1(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi)+\eta_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n(x_1+\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho) = \Omega_n(x_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, \xi)+\eta_n \end{cases}$$

sich ergiebt, so ist die obige Behauptung erwiesen.

Es sollen nun diese Sätze auf partielle Differentialgleichungsysteme ausgedehnt werden. Sei also ein solches Differentialgleichungsystem in der Form gegeben

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} = f_1\Big(z_1, \ldots, z_\lambda, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\lambda}, \\ \qquad\qquad \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\lambda}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho\Big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial z_1} = f_m\Big(z_1, \ldots, z_\lambda, u_1, \ldots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_1}{\partial z_\lambda}, \\ \qquad\qquad \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\lambda}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho\Big), \end{cases}$$

worin $z_1, \ldots, z_\lambda$ die unabhängigen Variabeln, $u_1, \ldots, u_m$ die abhängigen Variabeln und $\mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ wieder Parameter bedeuten, und werde angenommen, dass die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen aller in ihnen enthaltenen Grössen entwickelbar seien, so folgt zunächst aus dem Satze von der Existenz der Integrale, dass dasjenige Integralsystem, welches den Bedingungen unterliegt, dass

$$(16.)\quad \begin{cases} (u_1)_{z_1=0} = (A_{22}^{(1)} z_2^2 + \cdots + A_{\lambda\lambda}^{(1)} z_\lambda^2 + A_{23}^{(1)} z_2 z_3 + \cdots + A_{\lambda-1\lambda}^{(1)} z_{\lambda-1} z_\lambda) + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (u_m)_{z_1=0} = (A_{22}^{(m)} z_2^2 + \cdots + A_{\lambda\lambda}^{(m)} z_\lambda^2 + A_{23}^{(m)} z_2 z_3 + \cdots + A_{\lambda-1\lambda}^{(m)} z_{\lambda-1} z_\lambda) + \cdots \end{cases}$$

ist, worin die Reihen innerhalb gewisser Bereiche um die Nullpunkte von $z_2, z_3, \ldots, z_\lambda$ convergiren und Glieder erster Dimension nicht besitzen, in bestimmten Bereichen um die Nullpunkte der unabhängigen Variablen und für hinreichend kleine Werthe der ϱ Parameter nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda$ entwickelbar sind, da für die Nullwerthe aller unabhängigen Variabeln die m abhängigen Variabeln sowie deren nach $z_2, z_3, \ldots, z_\lambda$ genommene partielle Ableitungen verschwinden. Soll aber das Integralsystem von (15.) den Bedingungen unterliegen, dass

$$(17.)\quad \begin{cases} (u_1)_{z_1=0} = a_1^{(1)} + (a_2^{(1)} z_2 + \cdots + a_\lambda^{(1)} z_\lambda) + (a_{22}^{(1)} z_2^2 + \cdots + a_{\lambda-1\lambda}^{(1)} z_{\lambda-1} z_\lambda) + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\

Obigen ein Integralsystem $U_1, \ldots, U_m$ bestimmbar ist, welches nach Potenzen von $z_1, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ für hinreichend kleine Werthe dieser Grössen entwickelbar ist und den Bedingungen genügt, dass

$$(20.)\qquad \begin{cases} (U_1)_{z_1=0} = (a_{22}^{(1)} z_2^2 + \cdots + a_{\lambda-1\lambda}^{(1)} z_{\lambda-1\lambda}) + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (U_m)_{z_1=0} = (a_{22}^{(m)} z_2^2 + \cdots + a_{\lambda-1\lambda}^{(m)} z_{\lambda-1\lambda}) + \cdots; \end{cases}$$

es giebt somit nach (18.) ein ebenso entwickelbares Integralsystem von (15.), welches den Bedingungen (17.) Genüge leistet. Wir erhalten also den folgenden Satz:

Sind die rechten Seiten des partiellen Differentialgleichungsystems (15.) ***nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen der in ihnen enthaltenen Grössen entwickelbar, so giebt es ein Integralsystem, welches für*** $z_1 = 0$ ***die beliebig gegebenen convergenten Reihenwerthe*** (17.) ***annimmt und für hinreichend kleine Werthe von*** $z_1, \ldots, z_\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}$ ***nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen aller dieser Grössen entwickelbar ist.***

Sei nun ein bestimmtes Werthesystem von $a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}$ aus den bezeichneten Bereichen gewählt, und das Integralsystem von (15.) den Bedingungen (17.) gemäss bestimmt, so dass

$$(21.)\qquad \begin{cases} u_1 = \omega_1 (z_1, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\

in das System transformirt

$$(25.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_1} = f_1\Big(Z_1+\zeta_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_\lambda,\ U_1+\Omega_1^0+Z_2\dfrac{\partial \Omega_1^0}{\partial Z_2}+\cdots, \\ \qquad U_m+\Omega_m^0+Z_2\dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial Z_2}+\cdots,\ \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_2}+\dfrac{\partial \Omega_1^0}{\partial Z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_\lambda}+\dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial Z_\lambda}\Big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_1} = f_m\Big(Z_1+\zeta_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_\lambda,\ U_1+\Omega_1^0+Z_2\dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial Z_2}+\cdots, \\ \qquad U_m+\Omega_m^0+Z_2\dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial Z_2}+\cdots,\ \dfrac{\partial U_1}{\partial Z_2}+\dfrac{\partial \Omega_1^0}{\partial Z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial U_m}{\partial Z_\lambda}+\dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial Z_\lambda}\Big), \end{cases}$$

und dasjenige Integralsystem dieser Differentialgleichungen untersucht, welches den Bedingungen unterliegt, dass für $Z_1 = 0$ nach (21.) und (24.)

$$(26.)\quad \begin{cases} (U_\varkappa)_{Z_1=0} = \omega_\varkappa(\zeta_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_\lambda,\ a_1^{(1)},\ \ldots,\ a_\lambda^{(1)},\ a_{22}^{(1)},\ \ldots,\ a_1^{(m)},\ \ldots,\ a_\lambda^{(m)}, \\ \qquad a_{22}^{(m)},\ \ldots,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_\varrho) - \Omega_\varkappa^0 - Z_2\dfrac{\partial \Omega_\varkappa^0}{\partial Z_2} - \cdots - Z_\lambda\dfrac{\partial \Omega_\varkappa^0}{\partial Z_\lambda} \end{cases}$$

und daher

$$(27.)\quad \Big(\frac{\partial U_\varkappa}{\partial Z_\sigma}\Big)_{Z_1=0} = \frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, Z_2, \ldots, Z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)}{\partial Z_\sigma} - \frac{\partial \Omega_\varkappa^0}{\partial Z_\sigma}$$
$$(\sigma = 2, 3, \ldots, \lambda)$$

ist. Wird nun angenommen, dass das Werthesystem

$$(28.)\quad \begin{cases} z_1 = \zeta_1,\ z_2 = 0,\ \ldots,\ z_\lambda = 0,\ u_1 = \Omega_1^0,\ \ldots,\ u_m = \Omega_m^0, \\ \qquad \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} = \dfrac{\partial \Omega_1^0}{\partial z_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial u_m}{\partial z_\lambda} = \dfrac{\partial \Omega_m^0}{\partial z_\lambda},\ \mu_1 = 0,\ \ldots,\ \mu_\varrho = 0 \end{cases}$$

für die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der Gleichungen (15.) kein singuläres ist, d. h. lässt sich jede der Functionen $f_1, \ldots, f_m$ in der Umgebung dieser Werthe nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$z_1-\zeta_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\lambda,\ u_1-\Omega_1^0,\ \ldots,\ u_m-\Omega_m^0,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial z_2}-\frac{\partial \Omega_1^0}{\partial z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda}-\frac{\partial \Omega_m^0}{\partial z_\lambda},\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varrho$$

innerhalb bestimmter Bereiche entwickeln, so werden auch die rechten Seiten der Gleichungen (25.), wie aus den Substitutionsgleichungen (24.) hervorgeht, nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von

$$Z_1,\ \ldots,\ Z_\lambda,\ U_1,\ \ldots,\ U_m,\ \frac{\partial U_1}{\partial Z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial U_1}{\partial Z_\lambda},\ \ldots,\ \frac{\partial U_m}{\partial Z_2},\ \ldots,\ \frac{\partial U_m}{\partial Z_\lambda}$$

entwickelbar sein, und um den oben bewiesenen Satz auf das partielle Differentialgleichungsystem (25.) anwenden zu können, müssen noch die

Anfangsbedingungen (26.) untersucht werden. Nun ist aber vermöge der oben festgestellten Entwickelbarkeit der Functionen $\omega_\varkappa$:

$$(29.)\quad \begin{cases} \omega_\varkappa(\zeta_1, Z_2, \ldots, Z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho) \\ = \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, 0, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho) \\ \quad + Z_2\left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, Z_2, \ldots, 0, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)}{\partial Z_2}\right)_{Z_2=0} + \cdots \\ \cdots + Z_\lambda\left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, Z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)}{\partial Z_\lambda}\right)_{Z_\lambda=0} \\ \quad + (Z_2, \ldots, Z_\lambda)_2 + (Z_2, \ldots, Z_\lambda)_3 + \cdots, \end{cases}$$

und somit nach (26.) mit Benutzung von (23.)

$$(30.)\quad \begin{cases} (U_\varkappa)_{Z_1=0} = \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, 0, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho) \\ \quad - \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(1)}, \ldots, 0, \ldots, 0) \\ \quad + Z_2\left\{\left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, Z_2, \ldots, 0, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)}{\partial Z_2}\right)_{Z_2=0}\right. \\ \quad\quad \left. - \left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, Z_2, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(1)}, \ldots, 0, \ldots, 0)}{\partial Z_2}\right)_{Z_2=0}\right\} \\ \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + Z_\lambda\left\{\left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, Z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho)}{\partial Z_\lambda}\right)_{Z_\lambda=0}\right. \\ \quad\quad \left. - \left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, Z_\lambda, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(1)}, \ldots, 0, \ldots, 0)}{\partial Z_\lambda}\right)_{Z_\lambda=0}\right\} \\ \quad + (Z_2, \ldots, Z_\lambda)_2 + (Z_2, \ldots, Z_\lambda)_3 + \cdots \end{cases}$$

woraus ersichtlich, dass $a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ stets so klein gewählt werden können, dass sowohl das von $Z_2, \ldots, Z_\lambda$ freie Glied in (30.) als auch die Coefficienten von $Z_2, Z_3, \ldots, Z_\lambda$ unter einer hinreichend kleinen Grenze liegen. Damit sind aber die Bedingungen des oben ausgesprochenen Satzes für das Differentialgleichungsystem (25.) und die Anfangsbedingung (26.) erfüllt, und die Entwickelbarkeit von U_1, $U_2, \ldots, U_m$ nach Potenzen von $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}$, für hinreichend kleine Werthe dieser Grössen nachgewiesen, da die Entwickelbarkeit der in (30.) enthaltenen ω-Functionen oben festgestellt war. Ueberträgt man dieses Resultat vermöge der Substitutionen (24.) auf das ursprüngliche Differentialgleichungsystem (15.), so ergiebt sich hiermit der nachfolgende allgemeine Satz:

Sind in dem partiellen Differentialgleichungsystem (15.) ***die rechten Seiten nach Potenzen aller in ihnen enthaltenen Grössen entwickelbar, so giebt es stets ein Integralsystem***

$$u_\varkappa = \omega_\varkappa(z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, a_{22}^{(m)}, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho),$$

welches für $z_1 = 0$ ***in die beliebig gegebenen convergenten Reihenwerthe***

$$(u_\varkappa)_{z_1=0} = a_1^{(\varkappa)} + (a_2^{(\varkappa)} z_2 + \cdots + a_\lambda^{(\varkappa)} z_\lambda) + (a_{22}^{(\varkappa)} z_2^2 + \cdots + a_{\lambda-1\lambda}^{(\varkappa)} z_{\lambda-1} z_\lambda) + \cdots$$

übergeht und für hinreichend kleine Werthe der Grössen

$$z_1, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$$

nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}$, ***entwickelbar ist, und diese Integralelemente besitzen um einen beliebigen Punkt*** ζ_1 ***des zu*** z_1 ***gehörigen Convergenzkreises Fortsetzungen, welche nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von***

$$z_1 - \zeta_1, z_2, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$$

entwickelbar sind, vorausgesetzt, dass sich die Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ***in der Umgebung der Werthe***

$$z_1 = \zeta_1,\ z_2 = 0,\ \ldots,\ z_\lambda = 0,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0,\ \ldots,\ \mu_\varrho = 0,$$

$$u_\varkappa = \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(1)}, \ldots, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(m)}, \ldots, 0, \ldots, 0) = \Omega_\varkappa^0,$$

$$\frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_\sigma} = \left(\frac{\partial \omega_\varkappa(\zeta_1, 0, \ldots, 0, z_\sigma, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(1)}, \ldots, 0, \ldots, 0, a_{22}^{(m)}, \ldots, 0, \ldots, 0)}{\partial z_\sigma}\right)_{z_\sigma=0}$$

$$= \frac{\partial \Omega_\varkappa^0}{\partial z_\sigma} \quad (\sigma = 2, 3, \ldots, \lambda),$$

also in der Umgebung der Punkte $z_1 = \zeta_1, z_2 = \cdots = z_\lambda = 0$ ***und der Werthe der Integralelemente des aus*** (15.) ***hergeleiteten Differentialgleichungsystems, in welchem*** $a_1^{(1)} = \cdots = a_\lambda^{(1)} = \cdots = a_1^{(m)} = \cdots = a_\lambda^{(m)} = \mu_1 = \cdots = \mu_\varrho = 0$ ***gesetzt sind, innerhalb gewisser Bereiche nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von***

$$z_1 - \zeta_1, z_2, \ldots, z_\lambda, u_1 - \Omega_1^0, \ldots, u_m - \Omega_m^0, \frac{\partial u_1}{\partial z_2} - \frac{\partial \Omega_1^0}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\lambda} - \frac{\partial \Omega_m^0}{\partial z_\lambda}$$

entwickeln lassen, diese also kein singuläres Werthesystem dieser Functionen bilden, und man wird unter der Voraussetzung, dass, während z_1 ***von*** 0 ***bis*** ξ_1 ***läuft, die Werthe von*** z_1, ***die Nullwerthe von*** $z_2, \ldots, z_\lambda$, ***die zu diesen Werthen gehörigen Werthe der Integralelemente und deren Ableitungen für***

dasjenige Differentialgleichungsystem und dessen Anfangsbedingungen, die aus dem ursprünglichen durch Verschwinden der Werthe $a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***abgeleitet sind, durch kein singuläres Werthesystem der Functionen*** $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ***gehen, die Integralelemente selbst für jeden Werth von*** z_1 ***zwischen*** 0 ***und*** ξ_1 ***für hinreichend kleine Werthe von*** $z_2, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$ ***nach positiven, steigenden, ganzen Potenzen von***

$$z_2, \ldots, z_\lambda, a_1^{(1)}, \ldots, a_\lambda^{(1)}, \ldots, a_1^{(m)}, \ldots, a_\lambda^{(m)}, \mu_1, \ldots, \mu_\varrho$$

entwickeln können.

Heidelberg, 15. October 1893.

Arithmetische Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Diseriminantentheiler einer Gattung.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

§ 1.

In einer vor Kurzem veröffentlichten Arbeit (ds. Journ. Bd. 111, S. 61—83) habe ich die Congruenz des niedrigsten Grades aufgesucht, der die Fundamentalform

$$(1.) \qquad w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$$

eines gegebenen Gattungsbereiches der $n$ten Ordnung für eine beliebige Primzahl p als Modul genügt; hier ergab sich das für diese Arbeit grundlegende Resultat, dass w_0 für keine Primzahl einer Congruenz genügt, deren Grad kleiner ist als die Ordnung n der Gattung.

Die Congruenz niedrigsten Grades, der w_0 für p genügt, setzt sich nämlich in einfacher Weise aus denen zusammen, deren Wurzel w_0 für die einzelnen Primfactoren von p ist. Ist nämlich P irgend einer dieser Primfactoren für den Bereich $(\mathfrak{G})$ und $\varkappa$ seine Ordnungszahl, so genügt w_0 für unbestimmte Werthe von $u_1, \ldots, u_n$, modulo P betrachtet, einer Congruenz des $\varkappa$ten Grades:

$$(2.) \qquad \mathfrak{F}(w) = w^\varkappa + U^{(1)}(u_1, \ldots, u_n)w^{\varkappa-1} + \cdots + U^{(\varkappa)}(u_1, \ldots, u_n) \equiv 0 \pmod{P},$$

deren linke Seite für die Primzahl p irreductibel ist, während ihre Coefficienten ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ sind.

Ist nun

$$(3.) \qquad p = P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2} \ldots P_h^{\delta_h}$$

die Zerlegung von p in seine Primdivisoren innerhalb des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ und sind:

$$(4.) \qquad \mathfrak{F}_1(w), \quad \mathfrak{F}_2(w), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_h(w)$$

die Functionen niedrigsten Grades, denen die Fundamentalform w_0 beziehlich

für die h von einander verschiedenen Primdivisoren

$$(5.) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_h$$

genügt, so sind diese in Bezug auf w bzw. vom Grade

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_h,$$

nämlich gleich den Ordnungszahlen der entsprechenden Primfactoren von p. Dann wurde a. a. O. (S. 75) nachgewiesen, dass die Congruenz niedrigsten Grades, der w_0 für die Primzahl p selbst genügt, die folgende ist:

$$(6.) \qquad \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\mathfrak{F}_2^{\delta_2}(w)\ldots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w) \equiv 0 \pmod{p},$$

und ihr Grad in w ist

$$(6^a.) \qquad \varkappa_1\delta_1+\varkappa_2\delta_2+\cdots+\varkappa_h\delta_h = n.$$

Ersetzt man hier w durch w_0, so wird allgemein $\mathfrak{F}_i(w_0)$ durch den Divisor P_i, also das ganze Product durch $(P_1^{\delta_1}\ldots P_h^{\delta_h})$ d. h. in der That durch p theilbar.

Wir wollen nun an Stelle der Fundamentalform w_0 irgend eine ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$

$$(7.) \qquad \xi_0 = a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$$

betrachten, welche also aus w_0 einfach dadurch hervorgeht, dass man den Unbestimmten $(u_1, \ldots, u_n)$ die ganzzahligen Werthe $(a_1, \ldots, a_n)$ beilegt, und untersuchen, welcher ganzzahligen Congruenz ξ_0 für den Modul p genügt.

Offenbar genügt ξ_0 der Congruenz des $n$ten Grades, welche aus (6.) hervorgeht, wenn man dort $(u_1, \ldots, u_n)$ durch $(a_1, \ldots, a_n)$ ersetzt. Bezeichnet man allgemein die dann aus

$$\mathfrak{F}_1(w), \quad \mathfrak{F}_2(w), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_h(w)$$

hervorgehenden ganzen ganzzahligen Functionen der Grade $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_h$ beziehlich durch

$$\mathfrak{F}_1(\xi), \quad \mathfrak{F}_2(\xi), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_h(\xi)$$

(wobei die Variable w zum Unterschiede jetzt durch ξ bezeichnet werden soll), so ist ξ_0 eine Wurzel der Congruenz des $n$ten Grades mit ganzzahligen Coefficienten

$$(8.) \qquad \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(\xi)\ldots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(\xi) \equiv 0 \pmod{p},$$

denn die einzelnen Zahlen $\mathfrak{F}_i(\xi_0)$ unterscheiden sich von den entsprechenden Formen $\mathfrak{F}_i(w_0)$ nur dadurch, dass jetzt die Unbestimmten $(u_1, \ldots, u_n)$

durch die ganzen Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$ ersetzt sind; dieselben sind also a fortiori durch die entsprechenden Primfactoren theilbar.

Während nun, wie in der erwähnten Arbeit bewiesen wurde, die Fundamentalform w_0 keiner Congruenz genügt, deren Grad niedriger ist, als der von (6.), braucht die Congruenz (8.) keineswegs die niedrigste zu sein, die für ξ_0 gefunden werden kann; jedenfalls muss ξ_0 in geeigneter Weise gewählt werden, damit dies der Fall sei. Es soll nun zunächst untersucht werden, wie ξ_0 zu diesem Zwecke anzunehmen ist; wir stellen uns also die folgende Aufgabe:

> Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die ganze algebraische Zahl ξ_0 modulo p betrachtet keiner Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügt?

Es ist nun sehr leicht, ein System von nothwendigen Bedingungen hierfür anzugeben, von dem nachher bewiesen werden soll, dass sie auch hinreichend sind. Zunächst müssen nämlich die h ganzzahligen Functionen von ξ $\mathfrak{F}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{F}_h(\xi)$ in (8.) modulo p betrachtet irreductibel sein. In der That, wäre z. B.

$$\mathfrak{F}_1(\xi) \equiv F_1(\xi) . G_1(\xi) \pmod{p},$$

wo also F_1 und G_1 in ξ von niedrigerem als dem $n_1$ten Grade sind, so bestünde dieselbe Congruenz auch für den Primtheiler P_1 von p. Ersetzt man aber in dieser ξ durch ξ_0 und beachtet, dass dann $\mathfrak{F}_1(\xi_0)$ durch P_0 theilbar wird, so erhielte man die Congruenz:

$$F_1(\xi_0) . G_1(\xi_0) \equiv 0 \pmod{P_1},$$

und hier muss einer dieser Factoren, etwa $F_1(\xi_0)$ durch den Primtheiler P_1 theilbar sein. Dann genügt aber ξ_0 offenbar modulo p betrachtet der Congruenz:

$$(8^a.) \qquad F_1^{\delta_1}(\xi)\mathfrak{F}_2^{\delta_2}(\xi)\ldots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(\xi) \equiv 0 \pmod{p},$$

weil auch in ihr der erste Factor auf der linken Seite den Divisor $P_1^{\delta_1}$ enthält, während die übrigen, wie vorher, beziehlich durch $P_2^{\delta_2}, \ldots, P_h^{\delta_h}$ theilbar sind; und ferner ist der Grad von (8ª.) niedriger als n, denn er ist niedriger als der Grad von (8.).

Zweitens müssen aber die h irreductiblen ganzzahligen Functionen $\mathfrak{F}_i(\xi)$ modulo p betrachtet sämmtlich von einander verschieden sein. Wären nämlich etwa $\mathfrak{F}_1(\xi)$ und $\mathfrak{F}_2(\xi)$ für diesen Modul congruent, so wäre a fortiori:

$$\mathfrak{F}_1(\xi) \equiv \mathfrak{F}_2(\xi) \pmod{P_1 P_2},$$

da $P_1 P_2$ ein Theiler von p ist. Ersetzt man hier wieder ξ durch ξ_0 und beachtet, dass $\mathfrak{F}_1(\xi_0)$ durch P_1, $\mathfrak{F}_2(\xi_0)$ durch P_2 theilbar ist, so folgt aus der obigen Congruenz, dass sowohl $\mathfrak{F}_1(\xi_0)$ als auch $\mathfrak{F}_2(\xi_0)$ durch das Product $(P_1 P_2)$ divisibel ist. Ist nun von den beiden Exponenten δ_1, δ_2 etwa $\delta_1 \geqq \delta_2$, so ist die Potenz $\mathfrak{F}_1^{\delta_1}(\xi)$ für $\xi = \xi_0$ durch das Product $(P_1 P_2)^{\delta_1}$, also a fortiori durch $P_1^{\delta_1} P_2^{\delta_2}$ theilbar, und hieraus ergiebt sich, dass in diesem Falle ξ_0 der folgenden Congruenz genügt:

$$(8^b.) \qquad \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(\xi) . \mathfrak{F}_3^{\delta_3}(\xi) \ldots \mathfrak{F}_h^{\delta_h}(\xi) \equiv 0 \pmod{p},$$

deren Grad ebenfalls niedriger als der von (8.) d. h. kleiner als n ist. Es ergiebt sich somit zunächst das folgende Resultat:

(A.) Die Zahl ξ_0 kann nur dann keiner Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade modulo p genügen, wenn die h ganzen ganzzahligen Functionen $\mathfrak{F}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{F}_h(\xi)$ in (8.) sämmtlich modulo p betrachtet irreductibel und von einander verschieden sind.

Diesen Satz hat Herr *Dedekind* in seiner grossen Arbeit „Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen“ (Abh. der Gött. Gesellschaft Bd. 23), wenn auch in einer etwas verschiedenen Fassung, zuerst ausgesprochen, er hat aber dort, was besonders hervorzuheben ist, weiter nachgewiesen, dass die Möglichkeit, h solche Functionen $\mathfrak{F}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{F}_h(\xi)$ zu finden, nothwendig und hinreichend dafür ist, dass eine Zahl ξ_0 existirt, in deren Gleichungsdiscriminante p nicht als ausserwesentlicher Theiler enthalten ist. Dieses Resultat genügte ihm, um für eine ganz specielle Gattung dritter Ordnung zu zeigen, dass die Primzahl 2 gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller ihrer Gleichungsdiscriminanten ist, denn allein hieraus ergab sich eben der Nachweis, dass die Theorie der Gattungen nicht auf die der höheren Congruenzen gegründet werden darf; dies ist jedoch dann möglich, wenn man, wie dies in dieser und in der vorigen Arbeit geschehen ist, anstatt einer geeignet gewählten ***Zahl*** ξ_0 des Bereiches die Linear*form* $w_0 = u_1 \xi_1 + \cdots + u_n \xi_n$ selbst für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ der Untersuchung zu Grunde legt, denn in der vorigen Arbeit wurde ja nachgewiesen, dass in *ihrer* Gleichungsdiscriminante ***keine*** Primzahl p als ausserwesentlicher Theiler enthalten ist. Die weiteren hier gefundenen Resultate über die gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler sind meines Wissens bis jetzt noch nicht angegeben worden.

Wir wollen nun zuerst untersuchen, ob es stets möglich ist, dieser nothwendigen Bedingung (A.) zu genügen. Sind die h ganzzahligen Functionen

$\mathfrak{F}_1(\xi), \ldots, \mathfrak{F}_h(\xi)$ sämmtlich modulo p irreductibel, so können überhaupt nur dann zwei von ihnen, etwa $\mathfrak{F}_1(\xi)$ und $\mathfrak{F}_2(\xi)$ einander congruent sein, wenn sie von demselben Grade sind, d. h. wenn die Ordnungszahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der zugehörigen Primfactoren P_1 und P_2 einander gleich sind. Wir wollen nun von den Ordnungszahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_h$ der nicht äquivalenten Primdivisoren $P_1, P_2, \ldots, P_h$ immer diejenigen zusammenfassen, welche einander gleich sind. Es mögen also von diesen h ganzen Zahlen:

$$\text{je } \lambda_1 \text{ gleich } \varkappa_1, \quad \text{je } \lambda_2 \text{ gleich } \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \text{je } \lambda_\gamma \text{ gleich } \varkappa_\gamma$$

sein, so dass also $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\gamma = h$ ist, und die γ Ordnungszahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\gamma$ sämmtlich von einander verschieden sind. Es sei nun $\varkappa$ irgend eine dieser γ Ordnungszahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\gamma$, und es mögen durch

$$(9.) \qquad P^{(1)}, \quad P^{(2)}, \quad \ldots, \quad P^{(\lambda)}$$

für den Augenblick diejenigen Primfactoren von p bezeichnet werden, deren Ordnungszahl gleich $\varkappa$ ist. Ebenso seien:

$$(9^a.) \qquad \mathfrak{F}^{(1)}(\xi), \quad \mathfrak{F}^{(2)}(\xi), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}^{(\lambda)}(\xi)$$

die Functionen $\varkappa$ten Grades, denen ξ_0 beziehlich für die Primfactoren $P^{(1)}, \ldots, P^{(\lambda)}$ genügt. Wir wollen dann untersuchen, ob es möglich ist, diese λ Functionen modulo p als irreductibel und incongruent vorauszusetzen.

Ist $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi)$ irreductibel und genügt ξ_0 modulo $P^{(1)}$ betrachtet irgend einer anderen ganzzahligen Congruenz:

$$\Phi(\xi) \equiv 0 \pmod{P^{(1)}},$$

so muss $\Phi(\xi)$ modulo $P^{(1)}$ durch $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi)$ theilbar sein, denn anderenfalls hätten ja $\Phi(\xi)$ und $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi)$ für $P^{(1)}$ einen gemeinsamen offenbar ganzzahligen Theiler, was der vorausgesetzten Irreductibilität von $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi)$ widerspräche. Es müsste also für den Modul $P^{(1)}$, mithin auch für p selbst, eine Congruenz von der Form bestehen:

$$\Phi(\xi) \equiv \mathfrak{F}^{(1)}(\xi)\Phi^{(1)}(\xi) \pmod{p};$$

ganz dasselbe gilt für die Functionen $\mathfrak{F}^{(2)}(\xi), \ldots, \mathfrak{F}^{(\lambda)}(\xi)$, falls auch sie für p als unzerlegbar vorausgesetzt werden.

Nun genügen aber alle ganzen Zahlen von $(\mathfrak{G})$, mithin auch ξ_0, für einen jeden der λ Divisoren $\varkappa$ter Ordnung $P^{(1)}, \ldots, P^{(\lambda)}$ der Congruenz:

$$\xi^{p^\varkappa} - \xi \equiv 0 \pmod{P^{(i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

mithin muss der Ausdruck $(\xi^{p^\varkappa}-\xi)$ modulo p betrachtet durch jede einzelne der λ Functionen $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi), \ldots, \mathfrak{F}^{(\lambda)}(\xi)$ theilbar sein, wenn diese, was jetzt

geschehen soll, als irreductibel angenommen werden. Sollen dieselben aber auch sämmtlich incongruent für p sein, so muss die Function $(\xi^{p^\varkappa}-\xi)$ durch ihr Product theilbar sein, dieselbe muss also mindestens λ modulo p irreductible Factoren $\varkappa$ten Grades besitzen. Zerfällt man aber diesen Ausdruck in seine für p unzerlegbaren Theiler, so findet man*), dass derselbe nur solche Factoren besitzt, deren Grad gleich $\varkappa$ selbst oder gleich einem Theiler von $\varkappa$ ist, und zwar hat $(\xi^{p^\varkappa}-\xi)$ genau

$$(10.) \qquad \bar{g}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\left(p^\varkappa - \Sigma p^{\frac{\varkappa}{q}} + \Sigma p^{\frac{\varkappa}{qq'}} - \Sigma p^{\frac{\varkappa}{qq'q''}} + \cdots\right)$$

irreductible Theiler des Grades $\varkappa$, welche sämmtlich von einander verschieden sind, wenn $q, q', q'', \ldots$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Primfactoren von $\varkappa$ bedeuten. Ist also $\lambda > \bar{g}(\varkappa)$, so ist es nicht möglich, die λ modulo p irreductiblen Functionen $\mathfrak{F}^{(1)}(\xi), \ldots, \mathfrak{F}^{(\lambda)}(\xi)$ sämmtlich von einander verschieden anzunehmen. Spricht man demnach das hier gefundene Resultat für alle γ von einander verschiedenen Ordnungszahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\gamma$ der Primfactoren von p aus, so geht aus dem unter (A.) angegebenen Satze nunmehr der folgende hervor:

Ist $p = P_1^{\delta_1} \ldots P_h^{\delta_h}$ die Zerlegung einer reellen Primzahl innerhalb eines Gattungsbereiches (𝔊), und sind von den h nicht äquivalenten Primfactoren $P_1, P_2, \ldots, P_h$

λ_1 von der Ordnung $\varkappa_1$,
λ_2 - - - $\varkappa_2$,
$\vdots$
λ_γ - - - $\varkappa_\gamma$,

(B.) so kann man nur dann eine Zahl ξ_0 des Bereiches (𝔊) finden, welche modulo p keiner Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügt, wenn die γ Bedingungen

$$(11.) \qquad \lambda_1 \leqq \bar{g}(\varkappa_1), \quad \lambda_2 \leqq \bar{g}(\varkappa_2), \quad \ldots, \quad \lambda_\gamma \leqq \bar{g}(\varkappa_\gamma)$$

sämmtlich erfüllt sind, wobei die γ ganzen Zahlen $\bar{g}(\varkappa)$ die in (10.) angegebene Bedeutung haben. Ist dagegen auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so genügt *jede* Zahl ξ_0 von (𝔊) modulo p einer ganzzahligen Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade.

---

*) Vgl. z. B. meine Arbeit: Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor; dieses Journal Bd. 101 S. 140 und 141.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass die Bedingungen (11.) auch hinreichend dafür sind, dass mindestens eine Zahl ξ_0 von $(\mathfrak{G})$ modulo p keiner Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügt. Ist zunächst wieder P einer der h Primdivisoren von p, und $\varkappa$ seine Ordnung, so kann man ξ_0 so wählen, dass es einer irreductiblen ganzzahligen Congruenz

$$\mathfrak{F}(\xi) \equiv 0 \pmod{P}$$

genügt, wenn $\mathfrak{F}(\xi)$ irgend einer von den $\overline{g}(\varkappa)$ irreductiblen Theilern $\varkappa$ten Grades von $(\xi^{p^\varkappa}-\xi)$ ist. In der Congruenz:

$$\xi^{p^\varkappa}-\xi \equiv \mathfrak{F}(\xi)\Phi(\xi) \pmod{P}$$

verschwindet nämlich die linke, also auch die rechte Seite für genau so viele incongruente Werthe von ξ als ihr Grad angiebt, nämlich für die $p^\varkappa$ modulo P incongruenten Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$. Es muss daher auch eine Zahl ξ_0 existiren, für welche $\mathfrak{F}(\xi_0)$ durch P theilbar ist, weil sonst die Function $\Phi(\xi)$ des Grades $(p^\varkappa-\varkappa)$ für $p^\varkappa$ incongruente Werthe von ξ modulo P verschwinden müsste, was nicht möglich ist. Man kann also ξ_0 stets so bestimmen, dass es eine Wurzel der beliebig gegebenen irreductiblen Congruenz des $\varkappa$ten Grades

$$\mathfrak{F}(\xi) \equiv 0 \pmod{P}$$

ist.

Wir wählen nun h modulo p incongruente irreductible Functionen $\mathfrak{F}_1(\xi), \mathfrak{F}_2(\xi), \ldots, \mathfrak{F}_h(\xi)$ aus, deren Grade beziehlich gleich $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_h$ sind, und von welchen allgemein $\mathfrak{F}_i(\xi)$ ein Theiler von $\xi^{p^{\varkappa_i}}-\xi$ ist. Ein solches System von h Functionen kann nur dann aufgestellt werden, wenn, wie wir dies jetzt voraussetzen wollen, die Bedingungen (11.) sämmtlich erfüllt sind. Dann kann man aber auch stets ein solches System finden, weil die Anzahl aller modulo p incongruenten irreductiblen Functionen der Grade $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h$ grösser ist, als die Zahl der hier gebrauchten Functionen. Es seien ferner

$$(12.) \qquad \xi_0^{(1)}, \quad \xi_0^{(2)}, \quad \ldots, \quad \xi_0^{(h)}$$

h ganze Zahlen von $(\mathfrak{G})$, welche so gewählt sind, dass allgemein $\xi_0^{(i)}$ modulo P_i betrachtet der Congruenz

$$(12^a.) \qquad \mathfrak{F}_i(\xi_0^{(i)}) \equiv 0 \pmod{P_i} \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

genügt; nach dem soeben bewiesenen Satze können solche h Zahlen $\xi_0^{(i)}$ stets gefunden werden. Dieselben mögen aber gleich von vorn herein so angenommen werden, dass die linken Seiten in $(12^a.)$ nicht durch P_i^2 theilbar

sind, d. h. dass:

$$(12^{b}.) \qquad \mathfrak{F}_i(\xi_0^{(i)}) \gtrless 0 \pmod{P_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Auch dies ist stets möglich, denn wäre etwa

$$\mathfrak{F}_1(\xi_0^{(1)}) \equiv 0 \pmod{P_1^2},$$

und ersetzt man $\xi_0^{(1)}$ durch $\bar{\xi}_0^{(1)} = (\xi_0^{(1)} + \pi_1)$, wo π_1 eine ganze Zahl ist, welche durch P_1, aber nicht durch P_1^2 theilbar ist, so ergiebt sich durch Entwickelung nach dem *Taylor*schen Satze:

$$\mathfrak{F}_1(\bar{\xi}_0^{(1)}) = \mathfrak{F}_1(\xi_0^{(1)} + \pi_1) = \mathfrak{F}_1(\xi_0^{(1)}) + \pi_1 \mathfrak{F}_1'(\xi_0^{(1)}) + \tfrac{1}{2}\pi_1^2 \mathfrak{F}_1''(\xi_0^{(1)}) + \cdots,$$

und da nach der Voraussetzung der erste Summand, und ferner auch der dritte und alle folgenden durch P_1^2 theilbar sind, während im zweiten $\mathfrak{F}_1'(\xi_0^{(1)})$ den Divisor P_1 nicht enthält, weil sonst $\mathfrak{F}_1'(\xi)$ mit der irreductiblen Function $\mathfrak{F}_1(\xi)$ einen gemeinsamen Theiler haben müsste, so ergiebt sich aus dieser Gleichung die Congruenz:

$$\mathfrak{F}_1(\bar{\xi}_0^{(1)}) \equiv \pi_1 \mathfrak{F}_1'(\xi_0^{(1)}) \gtrless 0 \pmod{P_1^2}.$$

Man kann also die h Zahlen $\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(h)}$ von vorn herein so wählen, dass die h Ausdrücke:

$$\mathfrak{F}_1(\xi_0^{(1)}), \quad \mathfrak{F}_2(\xi_0^{(2)}), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_h(\xi_0^{(h)})$$

einmal und nur einmal beziehlich durch die Divisoren

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_h$$

theilbar sind.

Ist dies geschehen, so ist es stets möglich, eine algebraische Zahl ξ_0 so zu bestimmen, dass allgemein:

$$(13.) \qquad \xi_0 \equiv \xi_0^{(i)} \pmod{P_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

ist. Ist nämlich Π_1 eine offenbar stets existirende Zahl des Bereiches $(\mathfrak{G})$, welche P_1 nicht enthält, aber durch alle anderen Divisoren von p theilbar ist, und bestimmt man eine andere Zahl ϱ_1 so, dass das Product

$$\varepsilon_1 = \varrho_1 \Pi_1^2 \equiv 1 \pmod{P_1^2}$$

ist*), so ist die Zahl ε_1 durch jeden der Divisoren $P_2^2, \ldots, P_h^2$ theilbar,

*) Setzt man $\varrho_1 = x_1 + \pi_1 y_1$, wo π_1 durch P_1 einmal und nur einmal theilbar ist, so bestimmen sich die beiden algebraischen Zahlen x_1 und y_1 aus den linearen Congruenzen für den Modul P_1

$$x_1 \Pi_1^2 \equiv 1 \pmod{P_1}, \qquad \frac{(x_1 + \pi_1 y_1)\Pi_1^2 - 1}{\pi_1} \equiv 0 \pmod{P_1},$$

welche stets gelöst werden können.

während sie durch P_1^2 getheilt den Rest 1 lässt. Sind nun ebenso:

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_h$$

h ganze algebraische Zahlen, welche so gewählt sind, dass allgemein:

$$\varepsilon_i \equiv 1 \pmod{P_i^2},$$
$$\varepsilon_i \equiv 0 \pmod{P_l^2}, \qquad (l \gtrless i)$$

und setzt man:

$$\xi_0 = \varepsilon_1 \xi_0^{(1)} + \varepsilon_2 \xi_0^{(2)} + \cdots + \varepsilon_h \xi_0^{(h)}, \tag{14.}$$

so genügt in der That ξ_0 den h Bedingungen (13.); es ergiebt sich also aus (12ª.) und (12ᵇ.), dass allgemein:

$$\begin{cases} \mathfrak{F}_i(\xi_0) \equiv \mathfrak{F}_i(\xi_0^{(i)}) \equiv 0 \pmod{P_i} \\ \mathfrak{F}_i(\xi_0) \equiv \mathfrak{F}_i(\xi_0^{(i)}) \gtrless 0 \pmod{P_i^2}. \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, h) \tag{15.}$$

Ferner ist aber allgemein der Ausdruck $\mathfrak{F}_i(\xi_0)$ durch keinen von P_i verschiedenen Primtheiler P_l theilbar; denn da $\mathfrak{F}_l(\xi_0)$ durch P_l ebenfalls divisibel ist, so müssten die beiden irreductiblen Functionen $\mathfrak{F}_i(\xi)$ und $\mathfrak{F}_l(\xi)$ einen gemeinsamen Theiler haben, d. h. sie müssten einander congruent sein, was der oben über diese Functionen gemachten Annahme widerstreitet.

Hat man also ξ_0 der Bedingung (14.) gemäss gewählt, so genügt diese Zahl allgemein für den Primtheiler P_i der irreductiblen Congruenz des $\varkappa_i$ten Grades:

$$\mathfrak{F}_i(\xi_0) \equiv 0 \pmod{P_i},$$

und dieser Ausdruck ist ausser durch P_i durch keinen anderen Primfactor theilbar, d. h. es ist:

$$p + u \cdot \mathfrak{F}_i(\xi_0) \nsim P_i.$$

Ist dies aber der Fall, so beweist man genau ebenso, wie dies für die Fundamentalform w_0 im § 3 der vorigen Arbeit geschah, dass die Congruenz des $n$ten Grades

$$\mathfrak{F}_1^{\delta_1}(\xi) \cdot \mathfrak{F}_2^{\delta_2}(\xi) \ldots \mathfrak{F}_h^{\delta_h}(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$$

die niedrigste ist, der ξ_0 genügt, d. h. es ist auch die Umkehrung des Satzes (B.) richtig.

Beachtet man, dass die Ordnung $\varkappa$ eines Primdivisors P von p übereinstimmt mit dem Grade in w des entsprechenden modulo p irreductiblen Factors $\mathfrak{F}(w)$ in (2.), so kann man das jetzt erlangte Resultat auch ohne Benutzung der Primfactoren von p folgendermaassen aussprechen:

Ist

$$\mathfrak{F}(w) \equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w)\ldots\mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w) \pmod{p}$$

die Zerlegung der Fundamentalgleichung einer Gattung (𝔊) in ihre modulo p irreductiblen Factoren, und geben die Zahlen

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_\gamma$$

an, wie viele von den h Factoren $\mathfrak{F}_1(w), \ldots, \mathfrak{F}_h(w)$ in w beziehlich von dem Grade

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_\gamma$$

(C.) sind, so genügt dann und nur dann *jede* Grösse ξ_0 des Bereiches modulo p einer Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade, wenn von den γ Bedingungen

$$\lambda_i > \bar{g}(\varkappa_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \gamma)$$

auch nur eine erfüllt ist. Hier bedeutet allgemein $\bar{g}(\varkappa)$ den ganzzahligen Ausdruck

$$\bar{g}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\left(p^{\varkappa} - \Sigma p^{\frac{\varkappa}{q}} + \Sigma p^{\frac{\varkappa}{qq'}} - \cdots\right),$$

und $q, q', \ldots$ sind die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl $\varkappa$.

Es sei nun ξ_0 irgend eine Zahl des Bereiches (𝔊); drückt man dann die n ersten Potenzen von ξ_0 durch das Fundamentalsystem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ aus, so ergeben sich n Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten:

$$(16.) \qquad \begin{cases} 1 &= a_{10}\xi_1 + \cdots + a_{n0}\xi_n, \\ \xi_0 &= a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{n1}\xi_n, \\ \vdots & \\ \xi_0^{n-1} &= a_{1,n-1}\xi_1 + \cdots + a_{n,n-1}\xi_n. \end{cases}$$

Nun genügt ξ_0 dann und nur dann modulo p einer ganzzahligen Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade, wenn die Determinante

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

der n linearen Gleichungen (16.) durch p theilbar ist, denn nur in diesem Falle kann man n nicht sämmtlich durch p theilbare ganze Zahlen $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ so bestimmen, dass, wenn man die erste Gleichung mit A_0, die zweite mit A_1, ..., die letzte mit A_{n-1} multiplicirt und sie addirt, die Summe

$$A_0 + A_1\xi_0 + \cdots + A_{n-1}\xi_0^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, weil die Coefficienten von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ auf der rechten Seite dieser Gleichung sämmtlich durch p theilbar sind. Bildet man nun die n Gleichungssysteme, welche man aus (16.) erhält, wenn man von (𝔊) zu den n conjugirten Gattungen übergeht, so beweist man genau, wie dies in der vorigen Arbeit geschah, die Richtigkeit der Gleichung:

$$\mathfrak{D}(\xi_0) = |a_{ik}|^2 . D,$$

wo $\mathfrak{D}(\xi_0)$ die Discriminante der Gleichung für ξ_0 und D die Gattungsdiscriminante von (𝔊) bedeutet.

Jede Gleichungsdiscriminante besteht also aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, einem, der Gattungsdiscriminante D, welcher in allen Discriminanten derselbe ist, einem anderen, dem Determinantenquadrate $|a_{ik}|^2$, welcher von der speciellen Wahl von ξ_0 abhängt. Aus diesem Grunde mag im Anschluss an eine Bezeichnung *Kronecker*s der erste der wesentliche, der letzte der ausserwesentliche Theiler der Discriminante $\mathfrak{D}(\xi_0)$ genannt werden. Eine Primzahl p ist also dann und nur dann in $|a_{ik}|^2$ enthalten, d. h. sie ist ein ausserwesentlicher Theiler der Discriminante $\mathfrak{D}(\xi_0)$, wenn ξ_0 modulo p betrachtet einer Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügt. Aus unserem Satze (C.) folgt nun, dass auch dieser erste Theil der Discriminante $|a_{ik}|^2$, obwohl er von der Wahl von ξ_0 abhängt und mit ξ_0 sich ändert, dennoch Factoren besitzen kann, welche dieselben bleiben, wie auch ξ_0 gewählt werde, welche also durch geeignete Wahl von ξ_0 nicht beseitigt werden könnten. Diese „gemeinsamen ausserwesentlichen Theiler" aller Gleichungsdiscriminanten einer Gattung sind alle Primzahlen p und nur sie, für welche jede Zahl ξ_0 des Bereiches einer Congruenz von niedrigerem als dem $n$ten Grade genügt. Mit Benutzung des Satzes (C.) kann dieses Resultat folgendermassen ausgesprochen werden:

(D.) Ist

$$F(w) \equiv \mathfrak{F}_1^{\delta_1}(w) \ldots \mathfrak{F}_h^{\delta_h}(w) \pmod{p}$$

die Zerlegung der Fundamentalgleichung einer Gattung (𝔊) in ihre modulo p irreductiblen Factoren, und geben die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\gamma$ an, wie viele derselben bzw. vom Grade $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\gamma$ in w sind, so ist p dann und nur dann ein gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten $\mathfrak{D}(\xi_0)$ von (𝔊), wenn von den γ Bedingungen

$$\lambda_1 > \bar{g}(\varkappa_1), \quad \ldots, \quad \lambda_\gamma > \bar{g}(\varkappa_\gamma)$$

mindestens eine erfüllt ist.

§ 2.

Das im vorigen Abschnitt abgeleitete Resultat kann auch in einer anderen Form ausgesprochen werden, welche darum bemerkenswerth ist, weil hier weder die Kenntniss der Zerlegung von p innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G})$, noch auch die Zerfällung der Fundamentalgleichung modulo p vorausgesetzt zu werden braucht.

Es sei nämlich P ein beliebiger Primfactor von p und $\varkappa$ seine Ordnungszahl. Ist dann wieder

$$w_0 = u_1\xi_1+\cdots+u_n\xi_n$$

eine Fundamentalform für den Bereich $(\mathfrak{G})$, und setzt man allgemein:

$$w_h = u_1\xi_1^{p^h}+\cdots+u_n\xi_n^{p^h} \qquad (h=0, 1, \ldots),$$

so lehrten die in der vorigen Arbeit durchgeführten Untersuchungen (a. a. O. S. 65), dass von diesen unendlich vielen Linearformen nur die $\varkappa$ ersten d. h. die Formen

$$w_0, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_{\varkappa-1}$$

für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ modulo P verschieden sind, dass dagegen $w_\varkappa \equiv w_0$, $w_{\varkappa+1} \equiv w_1$, $\ldots$ und allgemein

$$w_{h+\varkappa} \equiv w_h \pmod{P}$$

ist. Hieraus folgt sofort, dass eine Linearform

$$w_\nu - w_0 = u_1(\xi_1^{p^\nu}-\xi_1)+u_2(\xi_2^{p^\nu}-\xi_2)+\cdots+u_n(\xi_n^{p^\nu}-\xi_n)$$

dann und nur dann durch den Primfactor P theilbar ist, wenn die Zahl ν ein Vielfaches seiner Ordnungszahl $\varkappa$ ist. Ist dies der Fall, so lehren die folgenden einfachen Betrachtungen, dass P auch nur einmal in jener Linearform enthalten ist.

Ist zunächst P ein mehrfacher Theiler von p, ist also auch P^2 in p enthalten, so besteht nach dem *Fermat*schen Satze für alle ganzzahligen Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ die Congruenz:

$$w_\nu \equiv w_0^{p^\nu} \pmod{p}$$

und dieselbe ist also a fortiori für den Theiler P^2 von p erfüllt. Wäre also für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ P^2 ein Theiler der Linearform $w_\nu - w_0$, so müsste für alle Zahlen $\xi_0 = a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n$ von $(\mathfrak{G})$ die Congruenz bestehen:

$$\xi_0^{p^\nu}-\xi_0 \equiv 0 \pmod{P^2},$$

eine Annahme, von deren Unrichtigkeit man sich leicht überzeugt, wenn

man z. B. $\xi_0 = \pi$ annimmt, wo π durch P aber nicht durch P^2 theilbar sein soll; denn dann reducirt sich die linke Seite dieser Congruenz für den Modul P^2 einfach auf $(-\pi)$, weil π^{p^ν} sicher durch P^2 theilbar ist.

Ist dagegen P nur ein einfacher Theiler von p, und wäre die Linearform $w_\nu - w_0$ für unbestimmte $(u_1, \ldots, u_n)$ durch P^2 theilbar, so müssten für die n Elemente des Fundamentalsystems die Congruenzen:

$$\xi_i^{p^\nu} - \xi_i \equiv 0 \pmod{P^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

bestehen, was, wie leicht zu sehen ist, im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Sollte aber das System $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ diese Eigenschaft haben, so kann man dasselbe, ohne seinen Charakter für den Modul p, auf den es hier allein ankommt, zu verändern, durch ein anderes ersetzen, für welches dieser Ausnahmefall nicht eintritt. Ersetzt man nämlich in diesem Falle nur eins der n Elemente, etwa ξ_i durch $\xi_i + p$, so ist nach dem binomischen Satze:

$$(\xi_i + p)^{p^\nu} - (\xi_i + p) \equiv (\xi_i^{p^\nu} - \xi_i) - p \equiv -p \gtrless 0 \pmod{P^2},$$

weil alle anderen Terme durch p^2, mithin auch durch P^2 theilbar sind. Am einfachsten vermeidet man das Auftreten dieses Falles, ohne die Primfactoren von p zu kennen, wenn man, was stets möglich ist, das erste Element des Fundamentalsystems von vornherein gleich Eins annimmt, und dann an Stelle desselben $\xi_1 = 1 + p$ einführt, wodurch der Charakter des Fundamentalsystems modulo p überhaupt nicht geändert wird. Dann kann dieser Ausnahmefall für keinen Primfactor von p eintreten, weil ja

$$\xi_1^{p^\nu} - \xi_1 = (1+p)^{p^\nu} - (1+p) \equiv -p \pmod{p^2}$$

ist; in diesem Falle enthält also auch $w_\nu - w_0$ keinen einfachen Primtheiler von p mehr als einmal.

Das Resultat dieser kurzen Betrachtung kann jetzt in dem folgenden Satze ausgesprochen werden:

Die Linearform

$$w_\nu - w_0 = u_1(\xi_1^{p^\nu} - \xi_1) + \cdots + u_n(\xi_n^{p^\nu} - \xi_n),$$

welche in Bezug auf die Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des Fundamentalsystemes vom Grade p^ν ist, ist für unbestimmte $u_1, \ldots, u_n$ durch das Product aller von einander verschiedenen Primtheiler von p theilbar, deren Ordnungszahl $\varkappa$ ein genauer Theiler von ν ist, und sie enthält jeden von diesen nur ein Mal.

Aus diesem Satze kann man eine interessante Folgerung ziehen, welche für eine folgende Untersuchung von Wichtigkeit ist:

Enthält die Primzahl p lauter von einander verschiedene Primfactoren, ist also

$$p \sim P_1 P_2 \ldots P_h,$$

so kann man stets eine solche Linearform $w_\nu - w_0$ finden, dass sie durch die reelle Primzahl p selbst theilbar ist, oder, was dasselbe ist, dass die n Congruenzen:

$$\xi_i^{p^\nu} \equiv \xi_i \pmod{p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sämmtlich erfüllt sind. Nach dem soeben angegebenen Satze braucht man nämlich für ν nur das kleinste gemeinsame Vielfache der h Ordnungszahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h$ von den Primdivisoren $P_1, \ldots, P_h$ zu wählen.

Enthält dagegen p auch nur einen Primdivisor mehr als einmal, so ist keiner jener Linearfactoren $w_\nu - w_0$ durch p selbst theilbar, weil keine jener Differenzen einen mehrfachen Theiler von p mehr als einmal enthalten kann. Es ergiebt sich also der Satz:

> Die Primzahl p zerfällt dann und nur dann innerhalb des Bereiches $(\mathfrak{G})$ in lauter nicht äquivalente Divisoren, wenn mindestens eine der Linearformen $(w_\nu - w_0)$ durch p selbst theilbar ist.

Da die Zahl p dann und nur dann in der Gattungsdiscriminante von $(\mathfrak{G})$ enthalten ist, wenn sie mindestens einen Primfactor mehrfach enthält, so kann man als Corollar des vorigen noch den folgenden Satz aussprechen:

> Die Primzahl p ist dann und nur dann in der Discriminante der Gattung $(\mathfrak{G})$ enthalten, wenn eine der Linearformen $(w_\nu - w_0)$ durch eine gebrochene Potenz von p, aber nicht durch p selbst theilbar ist.

Es sei nun $\varkappa$ eine beliebige ganze Zahl. Wir bilden dann das Product:

$$F_\varkappa(w_0) = \frac{(w_\varkappa - w_0) \cdot \Pi(w_{\frac{\varkappa}{qq'}} - w_0) \cdot \Pi(w_{\frac{\varkappa}{qq'q''q'''}} - w_0) \ldots}{\Pi(w_{\frac{\varkappa}{q}} - w_0) \cdot \Pi(w_{\frac{\varkappa}{qq'q''}} - w_0) \ldots},$$

wo $q, q', q'', \ldots$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Primfactoren von $\varkappa$ bedeuten, oder kürzer das Product:

$$F_\varkappa(w_0) = \prod_{d \mid \varkappa} (w_d - w_0)^{\varepsilon_d},$$

wo $\varepsilon_d = \pm 1$ zu setzen ist, je nachdem der zugehörige Theiler d von $\varkappa$ eine

gerade oder eine ungerade Anzahl *verschiedener* Primfactoren q, q', q'', ... weniger enthält als $\varkappa$, wo dagegen $\varepsilon_d = 0$ ist, sobald der Quotient $\frac{\varkappa}{d}$ irgend welche gleichen Factoren enthält. Dieser Quotient ist eine gebrochene Function der Elemente $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des Fundamentalsystems von $(\mathfrak{G})$, welche in Bezug auf diese von der Dimension:

$$g(\varkappa) = p^{\varkappa} - \sum_q p^{\frac{\varkappa}{q}} + \sum_q p^{\frac{\varkappa}{qq'}} - \cdots = \sum_{d|\varkappa} \varepsilon_d p^d$$

ist, und man erkennt sofort, dass derselbe äquivalent dem Producte aller der verschiedenen Primtheiler von p ist, deren Ordnungszahl genau gleich $\varkappa$ ist. Ist nämlich zuerst $\overline{P}$ ein Primtheiler von p, dessen Ordnungszahl $\overline{\varkappa}$ kein Theiler von $\varkappa$ ist, so ist $\overline{P}$ weder im Zähler noch im Nenner von $F_\varkappa(w_0)$ enthalten. Ist dagegen $\overline{\varkappa}$ irgend ein Theiler von $\varkappa$, so zeigt man genau, wie bei der entsprechenden Frage in der Theorie der Kreistheilungsgleichungen, dass $\overline{P}$ genau so oft im Zähler, wie im Nenner von $F_\varkappa(w_0)$ vorkommt, sich also einfach forthebt. Ist endlich $\overline{\varkappa} = \varkappa$, so ist $\overline{P}$ einmal und nur einmal in der im Zähler von $F_\varkappa(w_0)$ auftretenden Linearform $(w_\varkappa - w_0)$ enthalten, und hiermit ist die Behauptung vollständig erwiesen. Sind also $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ..., $P^{(\lambda_\varkappa)}$ alle von einander verschiedenen Primfactoren von p, deren Ordnungszahl gleich $\varkappa$ ist, so ist $F_\varkappa(w_0)$ gleich dem Producte derselben, d. h. es besteht die Aequivalenz:

$$F_\varkappa(w_0) = \prod_{d|\varkappa} (w_d - w_0)^{\varepsilon_d} \sim P^{(1)} P^{(2)} \ldots P^{(\lambda_\varkappa)},$$

und hieraus ergiebt sich durch Uebergang zur Norm die Gleichung:

$$N.F_\varkappa(w) = p^{\varkappa\lambda_\varkappa} = p^{L_\varkappa}.$$

Die Form $F_\varkappa(w)$, welche in Bezug auf $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von der Dimension $g(\varkappa)$ ist, besitzt also die Ordnungszahl $\varkappa\lambda_\varkappa$, wenn $\lambda_\varkappa$ die Anzahl der von einander verschiedenen Primfactoren von p von der Ordnung $\varkappa$ ist. Existirt kein Primfactor der Ordnungszahl $\varkappa$, so ist natürlich $\lambda_\varkappa = 0$ zu setzen.

Bildet man nun die n Formen:

$$F_\varkappa(w_0) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

so sind ihre Ordnungszahlen $L_\varkappa$ gleich $\varkappa\lambda_\varkappa$; nach dem oben bewiesenen Satze (D.) ist aber die Primzahl p dann und nur dann ausserwesentlicher Theiler

aller Gleichungsdiscriminanten $\mathfrak{D}(\xi_0)$ von $(\mathfrak{G})$, wenn von den Ungleichungen

$$\lambda_\varkappa > \bar{g}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa} g(\varkappa) \quad \text{oder also} \quad \varkappa\lambda_\varkappa > g(\varkappa)$$

mindestens eine erfüllt ist. Da nun $\varkappa\lambda_\varkappa$ die Ordnungszahl der Form $F_\varkappa(w_0)$ ist, und $g(\varkappa)$ ihre Dimension in Bezug auf $\xi_1, \ldots, \xi_n$, so kann man das vorher gefundene Resultat nunmehr in der folgenden einfachen und eleganten Form aussprechen:

> Die Primzahl p ist dann und nur dann gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten $\mathfrak{D}(\xi_0)$ des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$, wenn unter den Formen
>
> $$F_\varkappa(w_0) = \prod_{d|\varkappa}(w_d - w_0)^{\varepsilon_d} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$
>
> mindestens eine vorhanden ist, deren Dimension in Bezug auf die Elemente $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des Fundamentalsystems kleiner ist als ihre Ordnungszahl, d. h. als der Exponent $L_\varkappa$ von p in der Gleichung
>
> $$N.F_\varkappa(w) = p^{L_\varkappa}.$$

§ 3.

Die Frage der gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler kann endlich noch in einer ganz anderen Weise behandelt werden, und hier ergiebt sich ein neues und besonders einfaches Kriterium für das Auftreten derselben.

Ist nämlich

$$\xi_1^{(0)}, \quad \ldots, \quad \xi_n^{(0)}$$

ein Fundamentalsystem für die betrachtete Gattung $(\mathfrak{G})$, und sind

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= u_1\xi_1^{(0)} + \cdots + u_n\xi_n^{(0)}, \\ w^{(1)} &= u_1\xi_1^{(1)} + \cdots + u_n\xi_n^{(1)}, \\ &\vdots \\ w^{(n-1)} &= u_1\xi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n\xi_n^{(n-1)} \end{aligned}$$

die Fundamentalformen für die Gattung $(\mathfrak{G})$ und ihre Conjugirten, so ist die Discriminante der Fundamentalgleichung:

$$D = \prod_{\alpha \gtrless \beta} (w^{(\alpha)} - w^{(\beta)}) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

eine homogene Function von $u_1, \ldots, u_n$ mit ganzzahligen Coefficienten; der grösste gemeinsame Theiler aller dieser Coefficienten ist eine ganze Zahl,

welche, wie ich in der oben erwähnten Arbeit (s. S. 78) nachgewiesen habe, mit der Gattungsdiscriminante, d. h. mit dem Determinantenquadrate

$$\left|\xi_i^{(\varkappa)}\right|^2 \qquad \binom{i=1,2,\ldots,n}{\varkappa=0,1,\ldots,n-1}$$

übereinstimmt; es ist nämlich

$$D(u_1, \ldots, u_n) = \Delta^2(u_1, \ldots, u_n).\left|\xi_i^{(\varkappa)}\right|^2, \tag{3.}$$

wo $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ eine homogene Function von $u_1, \ldots, u_n$ ist, deren Dimension offenbar gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, und deren Coefficienten keinen allen gemeinsamen Zahlentheiler mehr besitzen, d. h. $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ ist eine primitive ganzzahlige Function von $u_1, \ldots, u_n$.

Wählt man nun an Stelle von $w^{(0)}$ irgend eine ganze Zahl des Bereiches

$$\xi^{(0)} = a_1\xi_1^{(0)} + \cdots + a_n\xi_n^{(0)}$$

nebst ihren Conjugirten, so wird ihre Gleichungsdiscriminante gefunden, wenn man in dem Ausdruck (3.) die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ beziehlich durch die ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ersetzt, und die Primzahl p ist dann und nur dann ausserwesentlicher Theiler dieser Gleichungsdiscriminante, wenn sie in $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ enthalten ist. Hieraus folgt sofort der Satz:

Die Primzahl p ist dann und nur dann ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten der Gattung (𝔊), wenn die primitive Form

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n)$$

für alle ganzzahligen Werthe der Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ durch p theilbar ist.

Die Frage, wann eine ganzzahlige Form für alle ganzzahligen Werthe der Unbestimmten durch eine Primzahl p theilbar ist, wird nun vollständig durch den folgenden einfachen Satz gelöst:

Eine Form $U(u_1, \ldots, u_n)$ ist für alle ganzzahligen Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ durch eine Primzahl theilbar, wenn sie das Modulsystem

$$(p;\ u_1^p - u_1, \ldots, u_n^p - u_n) \tag{4.}$$

enthält, d. h. wenn U in der Form

$$U(u_1, \ldots, u_n) = p.U_0 + (u_1^p - u_1)U_1 + \cdots + (u_n^p - u_n)U_n \tag{4ª.}$$

geschrieben werden kann, wo $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ bedeuten.

Man kann diesen Satz am leichtesten inductiv beweisen: In der That besteht er offenbar für den Fall, dass gar keine Variable vorhanden ist; wir wollen nun annehmen, dass er für den Fall von $n-1$ Variabeln $(u_2, \ldots, u_n)$ bewiesen sei, und seine Richtigkeit für n Variable nachweisen. Ist die Form $U(u_1, \ldots, u_n)$ in u_1 von höherem als dem $(p-1)$-ten Grade, so kann man sie modulo $u_1^p - u_1$ auf eine andere $\overline{U}(u_1, \ldots, u_n)$ reduciren, deren Grad in u_1 höchstens gleich $p-1$ ist, denn es ist offenbar:

$$u_1^p \equiv u_1, \quad u_1^{p+1} \equiv u_1^2, \quad \ldots, \quad u_1^{p+i} \equiv u_1^{i+1} \pmod{(u_1^p - u_1)}.$$

Ordnet man die so erhaltene Function nach Potenzen von u_1, so ergiebt sich eine Congruenz:

$$(5.) \qquad U(u_1, \ldots, u_n) \equiv \overline{U} = \overline{U}_0 u_1^{p-1} + \overline{U}_1 u_1^{p-2} + \cdots + \overline{U}_{p-1} \pmod{(u_1^p - u_1)},$$

und die Function $\overline{U}(u_1, \ldots, u_n)$ wird für jedes ganzzahlige Werthsystem von $(u_1, \ldots, u_n)$ ebenfalls durch die Primzahl p theilbar sein, wenn dasselbe für $U(u_1, \ldots, u_n)$ der Fall ist, und umgekehrt, weil sich ja beide nur um ein Vielfaches von $u_1^p - u_1$ unterscheiden, und dieser Ausdruck für jeden ganzzahligen Werth von u_1 nach dem *Fermat*schen Satze seinerseits ein Vielfaches von p ist.

Legt man nun $u_2, \ldots, u_n$ irgend ein ganzzahliges Werthsystem $a_2, \ldots, a_n$ bei, wodurch $\overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_{p-1}$ in $A_0, \ldots, A_{p-1}$ übergehen mögen, so muss der so entstehende Ausdruck für $\overline{U}$,

$$A_0 u_1^{p-1} + A_1 u_1^{p-2} + \cdots + A_{p-1},$$

durch p theilbar sein, wenn man für u_1 jede der p incongruenten Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ setzt; da aber ein Ausdruck $(p-1)$-ten Grades modulo p für p incongruente Werthe nur dann verschwinden kann, wenn *alle* Coefficienten durch p theilbar sind, so folgt, dass $\overline{U}(u_1, \ldots, u_n)$ dann und nur dann für alle ganzzahligen Werthsysteme durch p theilbar ist, wenn für die p Coefficienten $\overline{U}_0(u_2, \ldots, u_n), \ldots, \overline{U}_{p-1}(u_2, \ldots, u_n)$, welche nur $u_2, \ldots, u_n$ enthalten, dasselbe gilt. Ist dies aber der Fall, so enthalten nach der oben gemachten Annahme alle diese Coefficienten das Divisorensystem $(p; u_2^p - u_2, \ldots, u_n^p - u_n)$. Ein Gleiches gilt also von der ganzen Form $\overline{U}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, und aus der Gleichung (5.) ergiebt sich endlich, dass die zu untersuchende Function das Divisorensystem

$$(p; u_1^p - u_1, \ldots, u_n^p - u_n)$$

enthält, denn dieselbe unterscheidet sich von der vorher betrachteten ja nur um ein Vielfaches von $(u_1^p - u_1)$; und hiermit ist jener Satz vollständig bewiesen.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich nunmehr das folgende einfache Kriterium für das Auftreten eines gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheilers:

Ist

$$\Delta^2(u_1, \ldots, u_n)$$

die von ihren Zahlenfactoren befreite Discriminante der Fundamentalgleichung einer Gattung (𝔊), so ist die Primzahl p dann und nur dann gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten von (𝔊), wenn die primitive ganzzahlige Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ des $\frac{1}{2}n(n-1)$-ten Grades das Divisorensystem

$$(p;\ u_1^p - u_1, \ \ldots, \ u_n^p - u_n)$$

im Sinne der *Kronecker*schen Festschrift enthält, d. h. wenn eine Gleichung besteht:

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n) = U_0 p + U_1(u_1^p - u_1) + \cdots + U_n(u_n^p - u_n),$$

wo $U_0, U_1, \ldots, U_n$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ sind.

In seiner Festschrift zu *E. E. Kummer*s Doctorjubiläum erwähnt *L. Kronecker* die Möglichkeit des Auftretens solcher gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler und fügt hinzu, dass dieser Fall „zum Beispiel“ dann eintritt, wenn die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ sich als ganze homogene Function von lauter Ausdrücken $(u_i^p - u_i)$ darstellen lässt. Die durchgeführten einfachen Betrachtungen lehren, dass dieser Fall im wesentlichen auch *nur* dann eintreten kann, wenn man nämlich noch ein Glied von der Form $pU_0(u_1, \ldots, u_n)$ zu jenen Ausdrücken hinzufügt; doch war zu dem vollständigen Beweise auch das in der ersten Arbeit (S. 78) gefundene Resultat nöthig, dass die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ wirklich primitiv ist, d. h. dass die Discriminante $D(u_1, \ldots, u_n)$ der Fundamentalgleichung ausser der Gattungsdiscriminante keinen Zahlentheiler mehr enthält.

Kennt man jene primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$, so ist es hiernach sehr leicht zu entscheiden, ob p ein gemeinsamer ausserwesentlicher Discriminantentheiler von (𝔊) ist, oder nicht. Man hat nämlich nur alle Coefficienten dieser Form auf ihre kleinsten Reste modulo p, alle Exponenten von $u_1, \ldots, u_n$, welche grösser sind als $p-1$, auf ihre kleinsten Reste modulo $p-1$ zu re-

duciren; dann ist p dann und nur dann ausserwesentlicher Theiler aller Discriminanten von ($\mathfrak{G}$), wenn die so erhaltene Form identisch Null ist.

Ich will für diese Art der Behandlung des Problems nur das folgende einfache Beispiel geben, welches von einem etwas anderen Gesichtspunkte aus in meiner Doctordissertation untersucht worden ist.

Es sei ν eine beliebige reelle Primzahl von der Form $3\mu+1$ und $\mathfrak{G}_3(\varepsilon)$ die durch die drei μ-gliedrigen Perioden ε_1, ε_2, ε_3 der νten Einheitswurzeln constituirte Gattung. Es sollen die gemeinsamen ausserwesentlichen Theiler aller Gleichungsdiscriminanten dieser Gattung gefunden werden.

Für den Bereich $\mathfrak{G}_3(\varepsilon)$ bilden die 3 Perioden ε_1, ε_2, ε_3 selbst ein Fundamentalsystem. Setzt man also:

$$w_1 = u_1\varepsilon_1+u_2\varepsilon_2+u_3\varepsilon_3,$$
$$w_2 = u_1\varepsilon_2+u_2\varepsilon_3+u_3\varepsilon_1,$$
$$w_3 = u_1\varepsilon_3+u_2\varepsilon_1+u_3\varepsilon_2,$$

so ist das Product $(w_1-w_2)(w_2-w_3)(w_3-w_1)$ die Quadratwurzel aus der Discriminante der Fundamentalgleichung. Unter Benutzung der bekannten Ausdrücke für die Resolvante der kubischen Periodengleichung ergiebt sich für diese Quadratwurzel ohne Schwierigkeit der Ausdruck:

$$\Pi(w_i-w_{i+1}) = -\nu(\alpha\Delta_1+\beta\Delta_2).$$

Hier sind α und β diejenigen ganzen Zahlen, welche bei der Zerlegung von ν in seine Primfactoren im Gebiete der dritten Einheitswurzeln auftreten; es ist nämlich:

$$(6.) \qquad \nu = (\alpha+3\beta\varrho)(\alpha+3\beta\varrho^2) = \alpha^2-3\alpha\beta+9\beta^2 \qquad (\varrho^2+\varrho+1=0),$$

und Δ_1 und Δ_2 sind die beiden primitiven Formen:

$$\Delta_1 = (u_1-u_2)(u_2-u_3)(u_3-u_1) = \sum_{i=1}^{3} u_i u_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{3} u_i^2 u_{i+1},$$
$$\Delta_2 = \Sigma(u_i^3-3u_iu_{i+1}^2)+6u_1u_2u_3.$$

Da die Form Δ_1 in Bezug auf jede der Grössen u_1, u_2, u_3 nur vom zweiten Grade ist, so kann hier nur die Zahl 2 als gemeinsamer Discriminantentheiler auftreten. Reducirt man aber die Formen Δ_1 und Δ_2 für das Divisorensystem:

$$M = (2,\ u_1^2-u_1,\ u_2^2-u_2,\ u_3^2-u_3)$$

auf ihren kleinsten Rest, so erkennt man sofort, das Δ_1 dasselbe enthält,

und es ergiebt sich für die primitive Form $(\alpha\Delta_1+\beta\Delta_2)$ die Congruenz:

$$\alpha\Delta_1+\beta\Delta_2 \equiv \beta[(u_1+u_2+u_3)+(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)] \pmod{M},$$

d. h. die Zahl 2 ist dann und nur dann gemeinsamer Discriminantentheiler von $\mathfrak{G}_3(\varepsilon)$, wenn

$$\beta \equiv 0 \pmod 2$$

ist.

Diesem Resultate kann man nun eine elegantere Form geben. Die in (6.) angegebene Zerlegung von ν liefert nämlich die folgende Darstellung von 4ν:

$$4\nu = (2\alpha-3\beta)^2+27\beta^2 = A^2+27B^2,$$

d. h. die Zahl 4ν ist stets in der Form A^2+27B^2 darstellbar, und die Eindeutigkeit der Zerlegung (6.) lässt unmittelbar erkennen, dass auch diese Darstellung eine eindeutige ist. Aus den beiden Gleichungen:

$$A = 2\alpha-3\beta, \quad B = \beta$$

folgt nun, dass A und B dann und nur dann durch 2 theilbar sind, wenn für β dasselbe gilt, d. h. nur in diesem Falle ist nicht nur 4ν, sondern auch ν selbst in der Form A^2+27B^2 darstellbar. Es ergiebt sich also der Satz:

> Ist $\nu = 3\mu+1$ eine beliebige reelle Primzahl, so ist die Zahl 2 dann und nur dann gemeinsamer ausserwesentlicher Discriminantentheiler der Gattung $\mathfrak{G}_3(\varepsilon)$, wenn die Zahl ν in der Form
>
> $$\nu = A^2+27B^2$$
>
> dargestellt werden kann.

Dieser Fall tritt für Primzahlen ν im ersten und zweiten Hundert allein bei den kubischen Periodengleichungen ein, welche aus Einheitswurzeln von einer der Ordnungen

$$31, \quad 43, \quad 109, \quad 127, \quad 157, \quad 189$$

gebildet sind.

§ 4.

In der oben erwähnten Besprechung der gemeinsamen ausserwesentlichen Discriminantentheiler einer Gattung macht *Kronecker* auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam, dass man dieselben dadurch beseitigen kann, dass man die Coefficienten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der Linearform

$$w_0 = u_1\xi_1+\cdots+u_n\xi_n$$

nicht mehr innerhalb des Bereiches der reellen ganzen Zahlen, sondern in

dem grösseren Raume der ganzen algebraischen Zahlen eines anderen Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ beliebig annimmt. Jedoch beweist *Kronecker* diesen interessanten Satz an jener Stelle nicht, und er giebt auch nicht an, wie dieser Gattungsbereich zu wählen ist, damit das Auftreten der gemeinsamen Discriminantentheiler vermieden werde. Auch später ist *Kronecker* auf diesen Gegenstand nicht mehr zurückgekommen, und ich habe in seinen hinterlassenen Papieren bis jetzt keine Andeutung des Beweises finden können.

Ich möchte daher auf diesen Punkt kurz eingehen und ausserdem zeigen, wie man die Gattung $\Gamma(\zeta)$ für die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ zu wählen hat, damit eine Primzahl p aufhört, gemeinsamer Discriminantentheiler zu sein, und welches die Gattung niedrigster Ordnung ist, deren Adjunction für diesen Zweck nothwendig ist. Endlich soll der Nachweis geführt werden, dass man zu diesem Zwecke für die Coefficienten immer nur die allereinfachsten algebraischen Zahlen, nämlich solche zu wählen braucht, welche aus Einheitswurzeln vom Primzahlgrade bestehen.

Zu diesen Resultaten führt der folgende Satz, der eine einfache Erweiterung des im vorigen Abschnitte aufgestellten ist:

Es seien

$$F_1(u_1), \quad F_2(u_2), \quad \ldots, \quad F_n(u_n) \tag{1.}$$

n ganze ganzzahlige Functionen von je einer Variablen $u_1, \ldots, u_n$, und es besitze allgemein $F_i(u_i)$, modulo p betrachtet, genau so viele incongruente ganzzahlige Wurzeln z_i, als ihr Grad angiebt; ferner sei $F(u_1, \ldots, u_n)$ eine ganze ganzzahlige Function von allen n Veränderlichen $u_1, \ldots, u_n$. Dann besteht die Congruenz:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv 0 \pmod{p} \tag{2.}$$

dann und nur dann für alle Congruenzwurzeln $z_1, \ldots, z_n$ der n Functionen (1.), wenn $F(u_1, \ldots, u_n)$ das Divisorensystem

$$(p;\ F_1(u_1), \ldots, F_n(u_n))$$

im Sinne der *Kronecker*schen Theorie enthält.

Der Beweis dieses Satzes kann genau ebenso wie der des vorigen geführt werden, da sich jener ausschliesslich auf den Umstand stützte, dass die Congruenzen des $p$ten Grades

$$F_i(u_i) = u_i^p - u_i \equiv 0 \pmod{p}$$

genau p, d. h. ebenso viele modulo p incongruente Wurzeln besitzen, als ihr Grad angiebt, und dass p eine Primzahl ist.

Diesen Satz kann man endlich noch in der Weise erweitern, dass man als Coefficienten der $n+1$ Functionen $F_1(u_1), \ldots, F_n(u_n), F(u_1, \ldots, u_n)$ nicht mehr reelle ganze Zahlen, sondern ganze algebraische Zahlen ζ eines beliebigen Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ annimmt; nur muss man dann an Stelle der reellen Zahl p, weil sie innerhalb $\Gamma(\zeta)$ im allgemeinen den Charakter der Unzerlegbarkeit verliert, einen Primdivisor $p(\zeta)$ von p als Modul annehmen. Besitzen dann allgemein die Functionen

$$F_i(u_i, \zeta)$$

modulo $p(\zeta)$ betrachtet innerhalb des Bereiches $\Gamma(\zeta)$ genau so viele incongruente Wurzeln ζ_i als ihr Grad angiebt, so beweist man wieder genau wie vorher, dass für eine ganze Function $F(u_1, \ldots, u_n, \zeta)$ die Congruenzen

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n; \zeta) \equiv 0 \pmod{p(\zeta)}$$

für alle Werthsysteme $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ dann und nur dann sämmtlich erfüllt sind, wenn die Function $F(u_1, \ldots, u_n, \zeta)$ durch die Elemente des Divisorensystemes

$$(p(\zeta); \quad F_1(u_1, \zeta), \quad \ldots, \quad F_n(u_n, \zeta))$$

homogen und linear mit ganzen Coefficienten dargestellt werden kann.

Wir wollen nun speciell annehmen, dass die *Coefficienten* jener $n+1$ Functionen $F_i(u_i, \zeta)$ und $F(u_1, \ldots, u_n, \zeta)$ wieder *reelle* ganze Zahlen sind, und wollen, um diese Voraussetzung zum Ausdruck zu bringen, dieselben wieder wie vorher durch $F_i(u_i)$ und $F(u_1, \ldots, u_n)$ bezeichnen. Dagegen mögen die Congruenzwurzeln ζ_i der Functionen $F_i(u_i)$ modulo $p(\zeta)$ jenem Gattungsbereiche $\Gamma(\zeta)$ angehören. Reducirt man dann die ganze ganzzahlige Function $F(u_1, \ldots, u_n)$ zunächst für das ganzzahlige Modulsystem

$$(F_1(u_1), \quad \ldots, \quad F_n(u_n))$$

auf seinen kleinsten Rest, so erhält man eine ganze Function $\bar{F}(u_1, \ldots, u_n)$ von $u_1, \ldots, u_n$ mit *reellen* ganzzahligen Coefficienten, welche allgemein in u_i von niedrigerem Grade ist als die Function $F_i(u_i)$. Diese reducirte Function kann dann offenbar nur dann durch die Elemente des Systemes:

$$(p(\zeta), \quad F_1(u_1), \quad \ldots, \quad F_n(u_n))$$

homogen dargestellt werden, wenn alle ihre Zahlencoefficienten durch $p(\zeta)$, also auch durch p selbst theilbar sind; d. h. $F(u_1, \ldots, u_n)$ enthält dann und nur dann das Divisorensystem

$$(p(\zeta), \quad F_1(u_1), \quad \ldots, \quad F_n(u_n)),$$

wenn es durch das reelle System

$$(p, \quad F_1(u_1), \quad \ldots, \quad F_n(u_n))$$

homogen und linear dargestellt werden kann.

Die Function $F(u_1, \ldots, u_n)$ verschwindet hiernach dann und nur dann modulo $p(\zeta)$ für alle Congruenzwurzeln der n Functionen $F_i(u_i)$, wenn die Congruenz

$$F(u_1, \ldots, u_n) \equiv 0 \quad [\text{modd.}(p, F_1(u_1), \ldots, F_n(u_n))] \tag{3.}$$

besteht.

Diesen Satz kann man nun benutzen, um die im Eingange dieses Abschnittes gestellten Fragen in sehr einfacher Weise zu lösen. Sei nämlich, wie in dem ersten Abschnitte dieser Arbeit,

$$w_0 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n$$

die Fundamentalform des Gattungsbereiches (𝔊), während $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ die $n-1$ zu w_0 conjugirten Fundamentalformen bezeichnen, endlich sei

$$\Delta^2(u_1, \ldots, u_n)$$

die von ihrem Zahlentheiler (der Gattungsdiscriminante) befreite Discriminante der Fundamentalgleichung. Ist dann $\Gamma(\zeta)$ ein beliebiger anderer Gattungsbereich und $p(\zeta)$ ein Primdivisor der reellen Primzahl p für $\Gamma(\zeta)$, so werde zunächst untersucht, unter welcher Bedingung $p(\zeta)$ gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Discriminanten $\Pi(w_i - w_z)$ ist, wenn man jetzt für $u_1, \ldots, u_n$ nicht mehr beliebige reelle, ganze Zahlen, sondern beliebige ganze algebraische Zahlen des Bereiches $\Gamma(\zeta)$ setzt; oder, was dasselbe ist, unter welcher Bedingung die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ stets durch $p(\zeta)$ theibar ist, wenn man für $u_1, \ldots, u_n$ beliebige ganze Zahlen des Bereiches $\Gamma(\zeta)$ setzt.

Ist nun k die Ordnungszahl des Primdivisors $p(\zeta)$ für den Bereich Γ, ist also die Anzahl der modulo $p(\zeta)$ incongruenten ganzen Zahlen von Γ gleich p^k, so genügt jede Zahl ζ dieses Bereiches der Congruenz:

$$w^{p^k} - u \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p(\zeta)),$$

und diese Congruenz besitzt also innerhalb Γ genau so viele incongruente Wurzeln, als ihr Grad angiebt. Die obige Frage kann also auch so gestellt werden: Unter welcher Bedingung ist die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ für alle Congruenzwurzeln modulo $p(\zeta)$ der n Functionen

$$u_1^{p^k} - u_1, \quad u_2^{p^k} - u_2, \quad \ldots, \quad u_n^{p^k} - u_n$$

durch $p(\zeta)$ theilbar. Diese Frage wird aber unmittelbar durch den zuletzt abgeleiteten Satz beantwortet, wenn man dort die n Functionen $F_i(u_i)$ durch $u_i^{p^k}-u_i$ ersetzt. Man erhält also den Satz:

Der Primdivisor $p(\zeta)$ ist für den Rationalitätsbereich $\Gamma(\zeta)$ dann und nur dann gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten von (𝔊), wenn die von ihrem Zahlenfactor befreite Gattungsdiscriminante von (𝔊), $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$, das Divisorensystem

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}-u_n) \tag{4.}$$

im *Kronecker*schen Sinne enthält; hier bedeutet k die Ordnungszahl von $p(\zeta)$ für den Bereich Γ.

Da das hier gefundene Kriterium allein von der Ordnungszahl k von $p(\zeta)$ abhängt, so gilt dasselbe für alle Divisoren von p innerhalb Γ, welche dieselbe Ordnungszahl haben.

Hiernach ist also in dem erweiterten Rationalitätsbereiche $\Gamma(\zeta)$ der Primdivisor $p(\zeta)$ dann und nur dann kein gemeinsamer ausserwesentlicher Discriminantentheiler von (𝔊), wenn die Bedingung:

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n) \gtrless 0 \quad (\text{modd.}(p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}))$$

erfüllt ist.

Das hier gefundene Resultat kann nun benutzt werden, um zu entscheiden, unter welchen Bedingungen es möglich ist, die Coefficienten $u_1, \ldots, u_n$ der Fundamentalform von (𝔊), $w_0 = u_1\xi_1 + \cdots + u_n\xi_n$, innerhalb eines Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ so anzunehmen, dass die Discriminante $D(w_0)$ der n conjugirten Grössen $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ *keinen einzigen* Primfactor von p öfter enthält als die Gattungsdiscriminante, oder was dasselbe ist, ob es möglich ist, die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ innerhalb $\Gamma(\zeta)$ so zu wählen, dass die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ zu p relativ prim ist.

Offenbar muss man hierzu zunächst $u_1 \ldots, u_n$ so annehmen können, dass die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ zu jedem einzelnen Primtheiler von p innerhalb $\Gamma(\zeta)$ theilerfremd ist, d. h. dass keiner jener Primdivisoren gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler der Discriminanten $D(w_0)$ von (𝔊) ist. Ist also

$$p = p_1^{\varepsilon_1}(\zeta) \ldots p_l^{\varepsilon_l}(\zeta)$$

die Zerlegung von p in seine Primfactoren innerhalb $\Gamma(\zeta)$, und sind

$$k_1, \quad \ldots, \quad k_l$$

die Ordnungszahlen der einzelnen von einander verschiedenen Primdivisoren, so kann p nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ kein einziges der l Divisorensysteme

$$P_{k_i} = (p;\ u_1^{p^{k_i}} - u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^{k_i}} - u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

enthält, wobei natürlich nur diejenigen Systeme untersucht zu werden brauchen, für welche die Zahlen k_i von einander verschieden sind. Sind diese Bedingungen aber erfüllt, so ergiebt sich leicht, dass für die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ stets solche ganze Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ des Gattungsbereiches $\Gamma(\zeta)$ gewählt werden können, dass die Zahl $\Delta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ zu p theilerfremd ist. Ist nämlich allgemein $p_i(\zeta)$ nicht gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten $D(w_0)$, so kann man n Zahlen $\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)}$ so bestimmen, dass

$$\Delta(\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)}) \gtrless 0 \pmod{p_i(\zeta)}$$

ist. Denkt man sich nun diese Zahlen für jeden der l Primdivisoren von p bestimmt, und wählt man dann, was offenbar stets möglich ist, n andere Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ so aus, dass

$$\zeta_1 \equiv \zeta_1^{(i)},\quad \zeta_2 \equiv \zeta_2^{(i)},\quad \ldots,\quad \zeta_n \equiv \zeta_n^{(i)} \pmod{p_i(\zeta)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

ist, so ist allgemein:

$$\Delta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \equiv \Delta(\zeta_1^{(i)}, \ldots, \zeta_n^{(i)}) \gtrless 0 \pmod{p_i(\zeta)};$$

d. h. die Zahl $\Delta(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ ist in der That zu p theilerfremd. Wir wollen die Gattung $\Gamma(\zeta)$ eine *Ergänzungsgattung* für den Bereich $\mathfrak{G}(\xi)$ in Bezug auf die Primzahl p nennen, wenn man die Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ in den n conjugirten Fundamentalformen $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ innerhalb $\Gamma(\zeta)$ so auswählen kann, dass die Discriminante $\Pi(w_i - w_k)$ die Primzahl p nicht öfter enthält, als die Gattungsdiscriminante von $(\mathfrak{G})$. Dann kann man die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $\Gamma(\zeta)$ für $\mathfrak{G}(\xi)$ in Bezug auf p eine Ergänzungsgattung ist, folgendermassen aussprechen:

> Es sei $p = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_l^{\varepsilon_l}$ die Zerlegung der reellen Primzahl p in ihre Primfactoren innerhalb der Gattung Γ, und $k_1, k_2, \ldots, k_\lambda$ seien diejenigen Ordnungszahlen derselben, welche von einander verschieden sind. Dann ist $\Gamma(\zeta)$ dann und nur dann eine Ergänzungsgattung von $(\mathfrak{G})$ in Bezug auf die Primzahl p, wenn die von ihrem Zahlenfactor befreite Discriminante der Fundamentalgleichung von

(𝔊) kein einziges der λ Divisorensysteme

$$P_{k_1},\quad P_{k_2},\quad \ldots,\quad P_{k_\lambda},$$

enthält.

Ist die adjungirte Gattung $I'(\zeta)$ speciell eine *Galois*'sche, so sind die Ordnungszahlen aller Primdivisoren von p einander gleich. Nennt man also k den gemeinsamen Werth aller jener Ordnungszahlen, so tritt an die Stelle der im obigen Satze ausgesprochenen Bedingungen die einfachere, dass die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ das eine Divisorensystem

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}-u_n)$$

nicht enthalten darf.

Ferner mag noch die Bemerkung hinzugefügt werden, dass in dem obigen Satze alle diejenigen Divisorensysteme P_k fortgelassen werden dürfen, deren Index k ein Vielfaches einer der anderen Zahlen $k_1, \ldots, k_\lambda$ ist. Ist nämlich

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n) \gtrless 0 \pmod{P_k},$$

so ist a fortiori

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n) \gtrless 0 \pmod{P_{ak}};$$

denn aus der offenbar richtigen Congruenz:

$$u^{p^{ak}}-u \equiv (u^{p^k}-u)^{p^{(a-1)k}} \equiv 0 \pmod{(p;\ u^{p^k}-u)}$$

folgt ohne weiteres, dass jedes Divisorensystem P_{ak} ein Vielfaches von P_k ist; es kann also $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ nicht durch P_{ak} theilbar sein, wenn es das System P_k nicht enthält.

§ 5.

Es soll jetzt angegeben werden, welches die Ergänzungsgattung niedrigster Ordnung $\Gamma(\zeta)$ für einen gegebenen Gattungsbereich (𝔊) in Bezug auf eine beliebige Primzahl p ist.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir die von ihrem Zahlenfactor befreite Discriminante der Fundamentalgleichung

$$\Delta(u_1, \ldots, u_n)$$

auf ihre Theilbarkeit durch die Divisorensysteme

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad \ldots,$$

wo wieder allgemein

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}-u_n)$$

ist. Enthält diese primitive Form schon das erste System

$$P_1 = (p;\ u_1^p - u_1,\ \ldots,\ u_n^p - u_n)$$

nicht, so ist p überhaupt nicht ausserwesentlicher Theiler von (𝔊), d. h. die Ergänzungsgattung niedrigster Ordnung ist die der natürlichen ganzen Zahlen. Ist dagegen $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ durch P_1 theilbar, so muss man in der Reihe $P_1, P_2, \ldots$ zuletzt zu einem Divisorensystem

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k} - u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k} - u_n)$$

kommen, welches nicht mehr in Δ enthalten ist; wählt man nämlich μ so gross, dass die Potenz p^μ grösser als $\frac{n(n-1)}{2}$, d. h. grösser als die Dimension der primitiven Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ ist, so wird dieselbe durch das Modulsystem $(u_1^{p^\mu} - u_1, \ldots, u_n^{p^\mu} - u_n)$ überhaupt nicht mehr auf eine Form niedrigeren Grades reducirt, weil alle Exponenten von $u_1, \ldots, u_n$ kleiner sind als p^μ. Daher könnte die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ nur dann das Modulsystem

$$(p;\ u_1^{p^\mu} - u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^\mu} - u_n)$$

enthalten, wenn alle ihre Coefficienten durch p theilbar wären, und dies steht mit der Voraussetzung im Widerspruch, dass $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ primitiv ist. Diese Form kann also nur eine endliche Anzahl von Divisorensystemen $P_1, P_2, \ldots$ enthalten, und zwar ist diese Anzahl sicher kleiner als μ, wenn p^μ die niedrigste Potenz von p ist, welche grösser ist als $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es sei nun P_k das erste Modulsystem der Reihe $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}, P_k$, welches in Δ nicht enthalten ist, während also alle vorhergehenden Theiler jener Form sind. Ist dann

$$\varphi(\zeta) = \zeta^k + a_1\zeta^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

irgend eine Gleichung des $k$ten Grades, deren linke Seite auch modulo p betrachtet irreductibel ist*), so ist die durch sie constituirte Gattung $\Gamma(\zeta)$ eine Ergänzungsgattung zu $\mathfrak{G}(\xi)$ in Bezug auf p, und zwar eine solche von der niedrigsten Ordnung.

In der That ist $\Gamma(\zeta)$ zunächst eine Ergänzungsgattung zu (𝔊); da

*) Eine modulo p irreductible Function des $k$ten Grades existirt stets, denn die Anzahl

$$\bar{g}(k) = \frac{1}{k}\sum_{d|k}\varepsilon_d p^d$$

dieser Functionen ist niemals gleich Null.

nämlich die Function $\varphi(\zeta)$ modulo p irreductibel ist, so ist p innerhalb des Bereiches $\Gamma(\zeta)$ selbst eine Primzahl und ihre Ordnung für denselben ist p^k. Die Primzahl p wäre also dann und nur dann für den Rationalitätsbereich $\Gamma(\zeta)$ gemeinsamer ausserwesentlicher Theiler aller Gleichungsdiscriminanten von $(\mathfrak{G})$, wenn die primitive Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ das Divisorensystem $P_k = (p;\ u_i^{p^k} - u_i)$ enthielte, was der vorhin gemachten Annahme widerstreitet.

Ist ferner $\Gamma_1(\eta)$ eine andere Gattung, deren Ordnung kleiner ist als k, und $p(\eta)$ irgend ein Primdivisor von p für dieselbe, so ist seine Ordnungszahl k_1 höchstens gleich der Ordnung von $\Gamma_1(\eta)$, also sicher kleiner als k. Also ist $p(\eta)$ gemeinsamer ausserwesentlicher Discriminantentheiler von $(\mathfrak{G})$ für den Bereich $\Gamma_1(\eta)$, denn die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ enthält das Divisorensystem $P_{k_1} = (p;\ u_i^{p^{k_1}} - u_i)$, dessen Index kleiner ist als k. Man erhält also den Satz:

Ist

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k} - u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k} - u_n)$$

das Divisorensystem niedrigster Ordnung, welches in der primitiven Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ ***nicht*** enthalten ist, so ist die niedrigste Ergänzungsgattung Γ zu $\mathfrak{G}(\xi)$ für die Primzahl p von der Ordnung k, und eine solche wird durch jede ganzzahlige Gleichung des $k$ten Grades constituirt, deren linke Seite modulo p irreductibel ist.

Aus dem Beweise geht auch hervor, dass durch eine Gleichung des $k$ten Grades auch nur dann eine Ergänzungsgattung constituirt wird, wenn ihre linke Seite modulo p irreductibel ist. Da ferner der durch die obige Gleichung constituirte Gattungsbereich $\Gamma(\zeta)$, d. h. die Gesammtheit der rationalen Functionen von ζ bekanntlich alle Functionen umfasst, welche durch modulo p irreductible Gleichungen $k$ten Grades definirt werden, so erkennt man, dass es für p nur einen einzigen Gattungsbereich $\Gamma(\zeta)$ giebt, welcher ein Ergänzungsbereich niedrigster Ordnung in Bezug auf $\mathfrak{G}(\xi)$ ist.

Dieser letzte Ausspruch ist so zu verstehen, dass die ganzen Grössen zweier Gattungsbereiche $k$ter Ordnung, welche modulo p irreductibel sind, einander für diese Primzahl paarweise congruent sind, so dass bei der hier behandelten Frage der eine Bereich für den anderen gesetzt werden kann. Dagegen können die einzelnen Ergänzungsgattungen Γ ihrem algebraischen Charakter nach sehr verschiedener Natur sein, und es liegt hier die Frage nahe, welches die algebraisch einfachste Ergänzungsgattung für einen gegebenen Bereich $(\mathfrak{G})$ in Bezug auf eine Primzahl p ist.

An der oben erwähnten Stelle seiner Festschrift weist *Kronecker* darauf hin, dass bei der durch die kubische Gleichung

$$\alpha^3-\alpha^2-2\alpha-8 = 0$$

definirten Gattung (𝔊) die Zahl 2 gemeinsamer ausserwesentlicher Discriminantentheiler ist (was schon früher von Herrn *Dedekind* a. a. O. bemerkt worden war), dass aber jene Primzahl aufhört, ausserwesentlicher Theiler zu sein, sobald der Gattungsbereich Γ der dritten Einheitswurzeln dem Rationalitätsbereiche adjungirt wird. Für diesen Bereich (𝔊) ist also die einfachste *Kreistheilungs*gattung, nämlich die der dritten Einheitswurzeln eine Ergänzungsgattung in Bezug auf den ausserwesentlichen Theiler 2.

Es gilt nun der interessante Satz, dass man für jeden Bereich (𝔊) in Bezug auf eine beliebige Primzahl p als Ergänzungsgattung einen Bereich von grösster algebraischer Einfachheit finden kann, nämlich einen solchen, welcher durch Einheitswurzeln vom Primzahlgrade gebildet wird. Im Folgenden soll der Beweis dieses Satzes, sowie eine Methode entwickelt werden, um die niedrigste derartige Gattung zu finden.

Es sei wieder (𝔊) eine Gattung der $n$ten Ordnung und $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ die von ihrem Zahlenfactor befreite Discriminante der Fundamentalgleichung von (𝔊). Ferner seien

$$P_{k_1}, \quad P_{k_2}, \quad \ldots, \quad P_{k_l}$$

diejenigen Divisorensysteme

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}-u_n),$$

welche in der primitiven Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ enthalten sind. Jedoch brauchen hier nur diejenigen berücksichtigt zu werden, deren Index k nicht in einem der anderen Indices $k_1, \ldots, k_l$ als Theiler enthalten ist, denn nach einer oben gemachten Bemerkung ist die Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$, wenn sie das System P_{k_i} enthält, auch durch jedes System P_d theilbar, dessen Index ein Theiler von k_i ist. Wir bilden dann die ganze Zahl:

$$F(p) = (p^{k_1}-1)(p^{k_2}-1)\ldots(p^{k_l}-1)$$

und suchen die kleinste von p verschiedene Primzahl ν auf, welche in $F(p)$ nicht enthalten ist. Dann ist die Gattung Γ_ν der νten Wurzeln der Einheit die niedrigste dieser Art, welche eine Ergänzungsgattung für (𝔊) in Bezug auf die Primzahl p ist.

Zunächst beweist man wieder leicht, dass Γ_ν wirklich eine Ergänzungsgattung für (𝔊) ist. Gehört nämlich p modulo ν zum Exponenten k, so zerfällt p innerhalb Γ_ν bekanntlich in lauter verschiedene Primfactoren von der Ordnung k; es ist demnach Γ_ν dann und nur dann eine Ergänzungsgattung zu (𝔊), wenn $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$ das Divisorensystem P_k nicht enthält. Diese Forderung ist wiederum nur erfüllt, wenn der Index k in keiner der l Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_l$ als Theiler vorkommt. Wäre dies aber der Fall, so wäre mindestens einer der l Factoren des Productes $F(p)$, also auch $F(p)$ selbst, durch ν theilbar, während ν die kleinste Primzahl ist, welche in jenem Producte nicht vorkommt, und hiermit ist der erste Theil jener Behauptung bewiesen.

Ist ferner ν_1 eine unterhalb ν liegende Primzahl und Γ_{ν_1} die durch die ν_1-ten Einheitswurzeln constituirte Gattung, so kann Γ_{ν_1} keine Ergänzungsgattung zu (𝔊) sein. In der That ist dann nach der vorher gemachten Voraussetzung ν_1 ein Theiler des Productes $F(p)$, d. h. ν_1 ist in mindestens einem der Factoren $(p^{k_i}-1)$ enthalten. Daher ist der Exponent k', zu dem p modulo ν_1 gehört, ein Theiler von einer der l Zahlen $k_1, \ldots, k_l$; das Divisorensystem $P_{k'}$ ist demnach ein Theiler der Form $\Delta(u_1, \ldots, u_n)$, oder, was dasselbe ist, p ist auch im Bereiche Γ_{ν_1} ausserwesentlicher Theiler von (𝔊).

Es sei nun Γ_ν die so bestimmte Ergänzungsgattung niedrigster Ordnung von Einheitswurzeln. Dann sind unter ihr genau so viele Gattungsbereiche $\Gamma_\nu(\lambda)$ enthalten, als die Zahl $\nu-1$ Theiler besitzt. Ist nämlich

$$\nu-1 = \lambda.\mu$$

irgend eine Zerlegung von $\nu-1$ in zwei Factoren, so giebt es eine unter ν enthaltene Gattung λter Ordnung, nämlich die der λ μ-gliedrigen Perioden der νten Einheitswurzeln. Es soll nun endlich untersucht werden, welches die Periodengattung $\Gamma_\nu(\lambda)$ der niedrigsten Ordnung λ ist, welche für (𝔊) noch eine Ergänzungsgattung ist.

Um diese Frage zu lösen, denke man sich alle Theiler von $\nu-1$ nach ihrer Grösse in absteigender Reihenfolge geordnet und bezeichne sie in dieser Ordnung mit

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \ldots, \quad \mu_\varrho,$$

so dass also $\mu_1 = \nu-1$, $\mu_\varrho = 1$ und

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \cdots > \mu_\varrho$$

ist. Ersetzt man dann p in $F(p)$ der Reihe nach durch $p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots, p^{\mu_\varrho}$,

so ist $F(p^{\mu_i})$ sicher durch ν theilbar, weil jeder der Factoren

$$p^{\mu_i k_i}-1 = (p^{\nu-1})^{k_i}-1$$

diese Primzahl enthält, dagegen enthält $F(p^{\mu_\varrho}) = F(p)$ diese Primzahl nach der oben über ν gemachten Voraussetzung nicht mehr. Es sei nun μ die erste, also die grösste jener Zahlen, für die

$$F(p^{\mu}) = (p^{\mu k_1}-1)\dots(p^{\mu k_l}-1)$$

durch ν nicht mehr theilbar ist, und es sei λ der zu μ complementäre Divisor von $\nu-1$, d. h. es sei

$$\lambda . \mu = \nu-1.$$

Dann ist die Gattung $\Gamma_\nu(\lambda)$ der λ μ-gliedrigen Perioden der νten Einheitswurzeln die niedrigste, welche noch eine Ergänzungsgattung für $(\mathfrak{G})$ ist.

Dass diese Gattung eine Ergänzungsgattung ist, erkennt man folgendermassen: Ist $\varkappa$ der Exponent, zu dem p^μ modulo ν gehört, d. h. die kleinste ganze Zahl, für welche die Differenz $(p^{\varkappa\mu}-1)$ durch ν theilbar ist, so zerfällt p innerhalb $\Gamma_\nu(\lambda)$ in lauter verschiedene Primfactoren der Ordnung $\varkappa$. Die Gattung $\Gamma_\nu(\lambda)$ ist demnach dann und nur dann eine Ergänzungsgattung zu $(\mathfrak{G})$, wenn die primitive Form $\Delta(u_1, \dots, u_n)$ das Modulsystem $P_\varkappa$ nicht enthält, wenn also $\varkappa$ in keiner der Zahlen $k_1, \dots, k_l$ aufgeht. Wäre dies aber der Fall, so müsste einer der Factoren $p^{\mu k_i}-1$, also auch die Zahl $F(p^\mu)$ durch ν theilbar sein, was nicht der Fall ist.

Betrachtet man ferner eine andere Periodengattung $\Gamma_\nu(\lambda')$ von niedrigerer Ordnung, für welche also $\lambda' < \lambda$, d. h. wenn $\lambda'\mu' = \nu-1$ gesetzt wird, für welche $\mu' > \mu$ ist, so kann diese keine Ergänzungsgattung für $(\mathfrak{G})$ sein. Ist nämlich $\varkappa'$ der Exponent, zu dem $p^{\mu'}$ modulo ν gehört, ist also $p^{\mu'\varkappa'}-1$ durch ν theilbar, so ist $\varkappa'$ sicher ein Theiler einer der Zahlen $k_1, \dots, k_l$; denn da $F(p^{\mu'})$ für jedes $\mu' > \mu$ durch ν theilbar ist, so ist einer der Factoren $(p^{\mu' k_i}-1)$ ein Vielfaches von ν, d. h. der Exponent $\varkappa'$, zu dem $p^{\mu'}$ modulo ν gehört, ist in k_i enthalten, und hieraus folgt, dass p auch für den Rationalitätsbereich $\Gamma_\nu(\lambda')$ ein ausserwesentlicher Theiler der Discriminanten von $(\mathfrak{G})$ ist. Damit ist die oben aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen, und man kann das Endresultat der ganzen letzten Untersuchung in dem folgenden eleganten Satze zusammenfassen:

> Es sei $(\mathfrak{G})$ eine beliebige Gattung $n$ter Ordnung und $\Delta(u_1, \dots, u_n)$ die von ihrem Zahlentheiler befreite Discriminante ihrer Fundamental-

gleichung. Ferner sei p irgend eine reelle Primzahl und es bezeichnen

$$P_{k_1},\quad P_{k_2},\quad \ldots,\quad P_{k_l}$$

alle diejenigen Divisorensysteme von der Form:

$$P_k = (p;\ u_1^{p^k}-u_1,\ \ldots,\ u_n^{p^k}-u_n),$$

welche in Δ enthalten sind, und von deren Indices $k_1, \ldots, k_l$ keiner ein Vielfaches eines anderen ist.

Ist dann ν die kleinste Primzahl, welche in der ganzen Zahl

$$F(p) = (p^{k_1}-1)\ldots(p^{k_l}-1)$$

nicht enthalten ist, so ist die Gattung Γ_ν der νten Einheitswurzeln die niedrigste dieser Art, welche eine Ergänzungsgattung der Gattung $(\mathfrak{G})$ ist, und ferner ist die unter ihr enthaltene Periodengattung $\Gamma_\nu(\lambda)$ der λ μ-gliedrigen Perioden der νten Einheitswurzeln die niedrigste dieser Art, welche noch dieselbe Eigenschaft besitzt, wenn μ der grösste Theiler von $\nu-1$ ist, für welchen die Zahl

$$F(p^\mu)$$

die Primzahl ν nicht enthält.

Berlin, 17. November 1893.

Errata in Band 113

(betr. die vorhergehende Arbeit des Verfassers).

Seite 70,	Zeile 10	von	unten	statt	$\mathfrak{F}(w_0)$ lies $p+\mathfrak{F}(w_0)$.
-	7	-	-	-	$\mathfrak{F}(w_0)$ - $p+\mathfrak{F}(w_0)$.
-	6	-	-	-	$\mathfrak{F}(w_0)$ - p und $\mathfrak{F}(w_0)$.
- 71,	- 10	-	oben	-	$F(w, u_1, \ldots, u_n)$ lies $\mathfrak{F}(w, u_1, \ldots, u_n)$.
	- 16	-	-	-	(mod. P) lies (mod. P^2).
	- 18	-	-	-	P lies P^2.
	- 6	-	unten	-	P - P'.

(Ferner in dieser Arbeit: Seite 128, Zeile 1 von oben statt 111 lies 113.)

Allgemeine Lösung der Magnetisirungs-Gleichungen für den Ring.

(Von Herrn *Jgnaz Schütz* in München.)

§ 1.

Herleitung der Magnetisirungsgleichungen. Literatur der Lösungen.

1. Das Potential $(-\Phi)$ eines magnetischen Systems in Bezug auf einen beliebig gelegenen Aufpunkt kann als die Summe zweier Potentiale

$$-\Phi = V+U \tag{I.}$$

aufgefasst werden. V rührt von jenem Theile des Systems her, dessen magnetischer Zustand als independent vorausgesetzt wird, dem „magnetisirenden“, U dagegen von jenem, dessen Zustand wesentlich durch das magnetische Feld bedingt wird, dem „magnetisirten“.

2. Das magnetische Potential eines magnetisirten Körpers ist gleich dem *Newton*schen Potentiale seiner freien Magnetismen

$$U = \iiint \frac{M_i}{r}\,dx\,dy\,dz + \int \frac{M_o}{r}\,do.$$

$M_i = -\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)$ ist hierbei die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Volumelements $dx\,dy\,dz$ und $M_o = -\nu$ die Flächendichte desselben auf dem Oberflächenelemente do. r ist die Entfernung des Volum-, bzw. Oberflächenelementes vom Aufpunkte. α, β, γ, ν sind die specifischen magnetischen Momente, geschätzt nach den drei rechtwinkligen Coordinatenrichtungen und nach der nach innen gezogenen Oberflächen-Normale N_i.

Es ist eine Voraussetzung der *Poisson*schen Magnetisirungstheorie, dass diese specifischen magnetischen Momente den magnetischen Kräften proportional sind; darnach ist, wenn k den Proportionalitätsfactor bezeichnet,

$$\alpha = k\frac{d\Phi}{dx},\quad \beta = k\frac{d\Phi}{dy},\quad \gamma = k\frac{d\Phi}{dz},\quad \nu = k\frac{d\Phi}{dN_i}.$$

Die Einführung dieser Werthe in den Ausdruck U ergiebt

$$U = -k\iiint \frac{\Delta\Phi}{r}\,dx\,dy\,dz - k\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dN_i}\,do\ ^*).$$

3. Substituirt man dies in die Gleichung (I.) und wendet auf diese sodann die Δ-Operation an, so erhält man für alle Punkte im Innern des magnetisirten Körpers

$$-\Delta\Phi = +4\pi k.\Delta\Phi,$$

woraus folgt

(II.) $$\Delta\Phi = 0$$

und

(III.) $$U = -k\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dN_i}\,do.$$

Durch die Gleichungen (I.) und (III.) ist der Zustand des magnetisirten Körpers vollkommen definirt.

4. Eine allgemeine Lösung dieser Gleichungen gab *Poisson* in den Mémoires de l'Académie 1824 für die Kugel und *Franz Neumann* in diesem Journal 1847, Bd. 37 für das Rotations-Ellipsoid. Einen Grenzfall, in welchem die Lösung *Neumanns* versagt, das unendlich verlängerte Rotations-Ellipsoid, behandelte *Kirchhoff* 1853 im 48. Bande dieses Journals und *Boltzmann* hat in seiner dem Andenken dieses Mannes gewidmeten Rectorats-Rede (Barth 1888, pag. 27) darauf aufmerksam gemacht, dass durch diese Arbeit *Kirchhoffs* im Zusammenhalte mit den Untersuchungen *Carl Neumanns* über Ring-Potentiale (Halle 1864) alle Vorbedingungen zur allgemeinen Lösung der Magnetisirungsgleichungen auch für den Fall eines Ringes geschaffen seien.

---

*) Ist k als Function der Coordinaten vorausgesetzt, dann muss natürlich dieser Ausdruck so geschrieben werden:

$$U = -\iiint \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\Phi}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(k\frac{d\Phi}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(k\frac{d\Phi}{dz}\right)\right]dx\,dy\,dz - \int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dN_i}\,do.$$

Nach partieller Integration des dreifachen Integrals fällt das Oberflächenintegral weg und es bleibt

(III^a.) $$U = +\iiint \left[\frac{d\Phi}{dx}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right]k.dx\,dy\,dz.$$

Die Gleichungen (I.) und (III.) sind die *Poisson*schen, die Gleichungen (I.) und (III^a.) die *Kirchhoff*schen Grundgleichungen der Magnetisirungstheorie. (Vgl. *Kirchhoff*, dieses Journal, 1853, Bd. 48, Gleichung 24.)

Diese allgemeine Lösung soll im Folgenden zunächst entwickelt werden.

§ 2.

Lösung für magnetisirende Kräfte mit eindeutiger Potentialfunction.

5. Vorausgesetzt sei zunächst, dass die magnetisirenden Kräfte nur von solchen endlichen magnetischen Massen herrühren, die ausserhalb des Ringkörpers liegen, und von solchen elektrischen Strömen endlicher Intensität, die den Ring weder umkreisen noch auch durch die Ringmasse selbst fliessen. Dann wird die Function V überall im Innern des Ringes die *Laplace*sche Differentialgleichung befriedigen und mit ihren Derivirten auch überall eindeutig, endlich und stetig sein.

Daher werden, wenn man auf der Oberfläche des Ringes eine Massenbelegung fingirt, deren Potentialwerthe v_o in allen Punkten der Oberfläche zusammenfallen mit den daselbst herrschenden Potentialwerthen V_o der äusseren magnetisirenden Kräfte, in Gemässheit des *Dirichlet*schen Principes auch für alle Punkte im Innern des Ringes die Potentialwerthe v_i dieser fingirten Massenbelegung zusammenfallen müssen mit den Werthen V_i in diesen Punkten. Dagegen werden natürlich für Punkte ausserhalb des Ringes die Functionen v_a und V_a im allgemeinen verschiedene Werthe besitzen. Die Dichtigkeit dieser fingirten Massenbelegung sei ganz allgemein als Function der Oberflächencoordinaten λ_o, ω_o, φ_o vorausgesetzt, wobei letztere im Sinne des von *Carl Neumann* inaugurirten Ringcoordinatensystems verstanden werden sollen und der ihnen angehängte Index o die Beziehung zum Oberflächenelemente do ausdrücken möge.

6. Folgendes ist die Definition dieser Coordinaten:

Legt man vom Mittelpunkte des Ringes an die Ringoberfläche einen Berührungskegel und schlägt um den Ringmittelpunkt als Centrum eine Kugel, welche die Ringoberfläche in deren Berührungslinie mit jenem Kegel durchschneidet, so sei der Schnittkreis dieser Kugel mit der Aequatorialebene des Ringes der Polarkreis des Ringes genannt. Einem beliebigen Punkte des Raumes seien jene zwei Punkte des Polarkreises als Pole zugeordnet, in welchen dieser die durch den Raumpunkt und die Ringaxe gelegte Ebene durchschneidet. Dies festgesetzt, bezeichnet λ das von 0 bis 1 gezählte Verhältniss der beiden Strecken, die den Raumpunkt mit seinen beiden Polen verbinden, ω den von 0 bis 2π gezählten Winkel, welchen jene beiden

Strecken mit einander einschliessen und φ die von 0 bis 2π gezählte Winkelcoordinate des einen der Pole auf dem Polarkreise.

7. In diesen Coordinaten ausgedrückt, lässt sich ein Oberflächenelement do des Ringes durch folgende Formel darstellen

$$do = \frac{2a^2\lambda(1-\lambda^2)\,d\omega\,d\varphi}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}.$$

Hierbei ist mit a der Radius des Polarkreises bezeichnet.

Die auf diesem Oberflächenelemente sitzende fictive Massenbelegung hat, wenn μ ihre Dichtigkeit daselbst ist, den Werth μdo; ihr Potential auf einen inneren oder äusseren Punkt ist

$$(1^{\text{i}}.) \qquad dv_i = \frac{2a^2\lambda(1-\lambda^2)}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}\cdot\mu.T_i.d\omega\,d\varphi,$$

$$(1^{\text{a}}.) \qquad dv_a = \frac{2a^2\lambda(1-\lambda^2)}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}\cdot\mu.T_a.d\omega\,d\varphi.$$

T_i und T_a bedeuten hierin die reciproken Entfernungen des Elementes do von dem innerhalb des Ringes gelegenen Aufpunkte $(\lambda_i, \omega_i, \varphi_i)$, beziehungsweise von dem ausserhalb gelegenen Punkte $(\lambda_a, \omega_a, \varphi_a)$. Eine Reihenentwicklung für dieselben gab *C. Neumann* in folgender Form:

$$(2^{\text{i}}.) \qquad \begin{cases} T_i = \sqrt{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2)}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) \\ \qquad .A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i), \end{cases}$$

$$(2^{\text{a}}.) \qquad \begin{cases} T_a = \sqrt{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2)}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) \\ \qquad .A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a). \end{cases}$$

Die C_p^q, $J_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda)$ haben die Werthe:

$$(3.) \qquad C_p^q = \frac{1}{2a}\,\frac{1.3\ldots(2p-1).1.3\ldots(2q-1)}{1.3\ldots(2p+2q-1)},$$

$$(4.) \qquad J_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos p\Theta.d\Theta}{(1-2\lambda\cos\Theta+\lambda^2)^{\frac{2p+1}{2}}},$$

$$(5.) \qquad A_p^q(\lambda) = \frac{\lambda^p}{2p}\int_0^{2\pi}\frac{\cos p\Theta.d\Theta}{\left(\sin^2\frac{\Theta}{2}+\lambda^2\cos^2\frac{\Theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

8. Das Gesammtpotential der dem V entsprechenden Oberflächenbelegung wird man erhalten, wenn man die im vorigen Artikel aufgestellten Gleichungen (1.) nach den Argumenten ω und φ, je in den Grenzen von

0 bis 2π, integrirt. Es ist daher

$$(6^{i}.)\quad \begin{cases} v_i = \sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi\, F(\lambda,\ \omega,\ \varphi) \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) \\ \qquad\qquad . A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i), \end{cases}$$

$$(6^{a}.)\quad \begin{cases} v_a = \sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi\, F(\lambda,\ \omega,\ \varphi) \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) \\ \qquad\qquad . A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a), \end{cases}$$

wobei $F(\lambda, \omega, \varphi)$ eine neue Function der Oberflächencoordinaten ist, die mit der Dichtigkeitsfunction μ der Gleichungen (1.) durch folgende Relation verknüpft ist

$$(7.)\qquad F(\lambda,\ \omega,\ \varphi) = \frac{(1-\lambda^2)2a^2\lambda}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\mu.$$

Der Auswerthung der Integrationen sei eine Bemerkung über die formale Bedeutung des in den Gleichungen (2.) und (6.) auftretenden Summensymbols vorausgeschickt. Es bedeutet

$$(8.)\qquad \sum_p \sum_q C_p^q = \sum_p (C_p^0+2C_p^1+2C_p^2+\cdots+2C_p^\infty).$$

9. Wir machen nun für $F(\lambda, \omega, \varphi)$ folgenden Ansatz

$$(9.)\quad \begin{cases} F(\lambda,\ \omega,\ \varphi) = \sum_m \sum_n [\mathfrak{A}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\cos n\varphi + \mathfrak{B}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\sin n\varphi \\ \qquad\qquad + \mathfrak{C}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\sin n\varphi + \mathfrak{D}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\cos n\varphi]. \end{cases}$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichungen (6.) ergiebt sich

$$(10^{i}.)\qquad v_i = \sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}[A_i+B_i+\Gamma_i+\Delta_i],$$

$$(10^{a}.)\qquad v_a = \sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}[A_a+B_a+\Gamma_a+\Delta_a].$$

Die in der eckigen Klammer stehenden griechischen Buchstaben sind Abkürzungen für folgende acht Doppelintegrale:

$$A_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{A}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i),$$

$$B_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i),$$

$$\Gamma_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{C}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i),$$

$$\Delta_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{D}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos p(\omega-\omega_i)\cos q(\varphi-\varphi_i),$$

$$A_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{A}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a),$$

$$B_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda)\cos m\omega.\sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a),$$

$$\Gamma_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{C}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a),$$

$$\Delta_a = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega\, d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{D}_m^n(\lambda)\sin m\omega.\cos n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda)\, A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega-\omega_a)\cos q(\varphi-\varphi_a).$$

10. Die Integrationen lassen sich leicht durchführen, sofern man sich nur daran erinnert, dass

(11.) $$\int_0^{2\pi} \sin r\alpha.\cos s\alpha = 0, \quad \text{für beliebige } r \text{ und } s,$$

(12ª.) (12ᵇ.) (12ᶜ.)
$$\int_0^{2\pi} \sin r\alpha.\sin s\beta = \begin{cases} = 0, & \text{für } r \gtrless s, \\ = \pi, & \text{für } r = s \gtrless 0, \\ = 0, & \text{für } r = s = 0, \end{cases}$$

(13ª.) (13ᵇ.) (13ᶜ.)
$$\int_0^{2\pi} \cos r\alpha.\cos s\beta = \begin{cases} = 0, & \text{für } r \gtrless s, \\ = \pi, & \text{für } r = s \gtrless 0, \\ = 2\pi, & \text{für } r = s = 0. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (11.) kann das Integral B_i auch so geschrieben werden:

(14.) $$B_i = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_m \sum_n \mathfrak{B}_m^n(\lambda)\cos m\omega \sin n\varphi \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i)\, A_p^q(\lambda)\cos p\omega.\cos p\omega_i \sin q\varphi.\sin q\varphi_i.$$

Wir integriren zunächst nach φ. Würde man im Ausdrucke (14.) die angezeigten Summenoperationen ausführen, so erhielte man eine vierfach unendliche Summe, deren allgemeines Glied mit Rücksicht auf die Bemerkung (8.) folgendermassen lautet:

$$16\,\mathfrak{B}_m^n(\lambda) C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos m\omega.\cos p\omega.\cos p\omega_i \sin q\varphi_i.\sin n\varphi.\sin q\varphi.$$

Von dieser Summe werden bei der Integration nach der Variablen φ alle Glieder verschwinden, bei denen die Stellenzeiger n und q von einander verschieden sind, und dann auch noch jenes Glied, bei welchem $n = q = 0$ ist. Die Integration der übrigen Glieder ergiebt eine Summe, deren allgemeines Glied zufolge der Gleichung (12ᵇ.) den Werth hat

$$16\pi\,\mathfrak{B}_m^q(\lambda) C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos p\omega_i \sin q\varphi_i.\cos m\omega\cos p\omega.$$

Man sieht auch, dass man hierbei dem Stellenzeiger q wegen Vorhandenseins des Factors $\sin q\varphi_i$ auch den Werth Null ertheilen darf, unbeschadet der durch die Formel (12^c.) beschränkten Allgemeinheit der Formel (12^b.), so dass das Summensymbol in der in (8.) definirten Bedeutung unbeschränkt wieder angewendet werden darf.

Bei der Integration nach ω werden auch wieder alle Glieder verschwinden, bei denen die Stellenzeiger m und p von einander verschieden sind; aber für $m = p = 0$ erhält man jetzt zufolge der Formel (13^c.) und unter Berücksichtigung der Bemerkung (8.) die Beiträge:

$$8\pi^2 \mathfrak{B}_0^q(\lambda) C_0^q J_0^q(\lambda_i) A_0^q(\lambda) \sin q\varphi_i.$$

Die übrigen Glieder liefern gemäss der Formel (13^b.) eine Summe vom allgemeinen Gliede

$$16\pi^2 \mathfrak{B}_p^q(\lambda) C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i.$$

Unser Integral kann daher allgemein geschrieben werden:

$$B_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \mathfrak{B}_p^q(\lambda) C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i.$$

11. Bildet man in analoger Weise auch die übrigen Integrale, und setzt man dieselben in die Gleichungen (10.) ein, so erhält man für das Potential unserer fingirten Oberflächenschicht die Werthe

$$(16^i.) \quad \begin{cases} v_i = 4\pi^2 \sqrt{1-2\lambda_i \cos\omega_i + \lambda_i^2} \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda) [\mathfrak{A}_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \cos q\varphi_i \\ \quad + \mathfrak{B}_p^q(\lambda) \cos p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{C}_p^q(\lambda) \sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{D}_p^q(\lambda) \sin p\omega_i \cos q\varphi_i], \end{cases}$$

$$(16^a.) \quad \begin{cases} v_a = 4\pi^2 \sqrt{1-2\lambda_a \cos\omega_a + \lambda_a^2} \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a) [\mathfrak{A}_p^q(\lambda) \cos p\omega_a \cos p\varphi_a \\ \quad + \mathfrak{B}_p^q(\lambda) \cos p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{C}_p^q(\lambda) \sin p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{D}_p^q(\lambda) \sin p\omega_a \cos q\varphi_a]. \end{cases}$$

12. Die Dichtigkeit der Oberflächenbelegung, welche diesen Potentialen entspricht, ist

$$\delta_v = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dN_i} + \frac{dv}{dN_a}\right)$$

oder in *Neumann*schen Ring-Coordinaten

$$(17.) \qquad \delta_v = \frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a \lambda^2}\left[\left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right)_o - \left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right)_o\right].$$

Der angehängte Index o soll ausdrücken, dass nach geschehener Differentiation alle Coordinaten als Oberflächencoordinaten zu verstehen sind.

Unter Zugrundelegung der *Poisson*schen Theorie leistet nun aber auch das Potential Φ zufolge der Gleichung (II.) überall im Innern des Ringes

der *Laplace*schen Differentialgleichung Genüge, und da gemäss den in Artikel 5 gemachten Voraussetzungen auch die übrigen Bedingungen der Anwendbarkeit des *Dirichlet*schen Principes erfüllt sind, so gilt alles, was in den Artikeln 5 bis 11 bezüglich des Potentiales V gesagt wurde, mutatis mutandis auch für Φ.

Bezeichnen wir die Potentiale der dem Φ entsprechenden Oberflächenschicht bezüglich innerer und äusserer Punkte mit φ_i und φ_a, so wird φ_i überall gleich sein müssen Φ_i, und es ist

$$(18^{i}.)\quad \begin{cases} \varphi_i = 4\pi^2\sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda)[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_i\cos q\varphi_i \\ \qquad +\mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_i\sin q\varphi_i+\mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_i\sin q\varphi_i+\mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_i\cos q\varphi_i], \end{cases}$$

$$(18^{a}.)\quad \begin{cases} \varphi_a = 4\pi^2\sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}\sum_p\sum_q C_p^q J_p^q(\lambda) A_p^q(\lambda_a)[\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_a\cos q\varphi_a \\ \qquad +\mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_a\sin q\varphi_a+\mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_a\sin q\varphi_a+\mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_a\cos q\varphi_a]. \end{cases}$$

Die Dichtigkeit δ_φ der entsprechenden Oberflächenschicht ist

$$(19.)\qquad \delta_\varphi = \frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a\lambda^2}\left[\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)_o-\left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right)_o\right].$$

Zu den Dichtigkeiten δ_v und δ_φ dieser fingirten Oberflächenbelegungen kommt dann noch die Dichtigkeit des an der Oberfläche infolge der Magnetisirung ausgeschiedenen freien Magnetismus.

Diese ist zufolge der Gleichung (III.) gleich

$$-\frac{d\Phi}{dN_i},$$

oder auch

$$(20.)\qquad \delta = +k\frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a\lambda^2}\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)_o.$$

13. Da nach dem in Artikel 5 Auseinandergesetzten die Functionen φ_i und v_i einzeln genommen gleich sind den Functionen Φ_i und V_i, so kann die Gleichung (I.) speciell auch so geschrieben werden

$$(IV.)\qquad \varphi_i+v_i+U_i = 0.$$

Es wird für späterhin nützlich sein, schon hier zu bemerken, dass auch noch die Gleichung

$$(V.)\qquad \varphi_a+v_a+U_a = 0$$

zu Recht besteht, eine Gleichung, die aus (I.) nicht mit unmittelbarer Evidenz gefolgert werden kann, weil die Functionen φ_a und v_a einzeln genommen nicht gleich sind den Functionen Φ_a und V_a. Aber es ist die

Summe φ_a+v_a überall gleich der Summe Φ_a+V_a; denn bezeichnen wir diese Summen für den Augenblick mit s und S, so genügt im ganzen äusseren Raume sowohl die Function S, wie man durch Anwendung der Δ-Operation auf die Gleichung (I.) sofort ersieht, der *Laplace*schen Differentialgleichung, als auch die Function s, weil diese von Massen herrührt, die nur an der Oberfläche des Ringes gedacht sind. Nun fallen aber die Functionswerthe von s und S für die Oberfläche des Ringes zusammen, weil für diese die φ_a und v_a als noch zulässige Grenzwerthe der φ_i und v_i aufgefasst werden können; in Gemässheit des *Dirichlet*schen Principes müssen daher die Functionen s und S auch im ganzen äusseren Raume zusammenfallen, womit die Evidenz für die Richtigkeit der Gleichung (V.), die wir später bei Berechnung des U_a zu benutzen haben werden, gewonnen ist.

Die Gleichungen (IV.) und (V.) besagen, dass das Gesammtpotential der drei durch die Formeln (17.), (19.) und (20.) definirten Oberflächenbelegungen überall verschwinden muss. Man genügt dieser Bedingung durch die Annahme, dass die resultirende Dichtigkeit unserer drei Oberflächenbelegungen überall gleich Null ist, und dies ist zufolge der Eindeutigkeit unseres Problems zugleich die einzige Lösung dieser Gleichungen. Es muss also sein

$$\delta_v+\delta_\varphi+\delta = \frac{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{8\pi a\lambda^2}\left[\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)-\left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right)+(1+4\pi k)\left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right)-\left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right)\right]_o = 0,$$

oder

$$(21.)\qquad 1 = -\left[\frac{\left(\frac{dv_a}{d\lambda_a}\right)-\left(\frac{dv_i}{d\lambda_i}\right)}{\left(\frac{d\varphi_a}{d\lambda_a}\right)-(1+4\pi k)\left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda_i}\right)}\right]_o.$$

14. Vor Durchführung der in dieser Gleichung angezeigten Operationen wollen wir die Gleichungen (16.) und (18.) ein wenig umgestalten. Wir setzen für den Augenblick

$$\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} = W(\lambda,\ \omega)$$

und entwickeln diese Function in eine nach den Cosinus der Vielfachen von ω fortschreitende Reihe. Man erhält

$$(22.)\qquad W(\lambda,\ \omega) = \sum_n K_n(\lambda)\cos n\omega,$$

wobei mit Rücksicht auf die in (8.) gegebene Definition des Summensymbols

die Coefficienten K_n ganz allgemein (einschliesslich $n = 0$) den Werth haben

$$(23.) \qquad K_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \cos n\omega \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}.$$

Nach Substitution des Ausdruckes (22.) in die Gleichungen (16.) und (18.) lauten diese

$$(24^{\mathrm{i}}.) \quad \begin{cases} v_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda_i) K_n(\lambda_i) A_p^q(\lambda) [\mathfrak{A}_p^q(\lambda)\cos p\omega_i \cos q\varphi_i \\ \qquad + \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega_i \sin p\varphi_i + \mathfrak{C}_p^q(\lambda)\sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{D}_p^q(\lambda)\sin p\omega_i \cos q\varphi_i], \end{cases}$$

$$(24^{\mathrm{a}}.) \quad \begin{cases} v_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda) K_n(\lambda_a) A_p^q(\lambda_a) [\mathfrak{A}_p^q(\lambda)\cos p\omega_a \cos q\omega_a \\ \qquad + \mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{C}_p^q(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{D}_p^q(\lambda)\sin p\omega_a \cos q\varphi_a], \end{cases}$$

$$(25^{\mathrm{i}}.) \quad \begin{cases} \varphi_i = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda_i) K_n(\lambda_i) A_p^q(\lambda) [\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_i \cos q\omega_i \\ \qquad + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_i \sin q\varphi_i + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_i \cos q\varphi_i], \end{cases}$$

$$(25^{\mathrm{a}}.) \quad \begin{cases} \varphi_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda) K_n(\lambda_a) A_p^q(\lambda_a) [\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_a \cos p\omega_a \\ \qquad + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\varphi_a \sin q\varphi_a + \mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_a \sin q\omega_a + \mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_a \cos q\varphi_a]. \end{cases}$$

15. Die weitläufigen Entwickelungen, zu denen die Substitution dieser zuletzt erhaltenen Werthe in die Gleichung (21.) führt, wollen wir hier nicht hinschreiben; sie vereinfachen sich erheblich, sobald man nach Ausführung der angezeigten Differentiationen gesetzt hat

$$\lambda_i = \lambda_a = \lambda, \quad \omega_i = \omega_a = \omega, \quad \varphi_i = \varphi_a = \varphi,$$

und liefern schliesslich folgende Bedingungsgleichung

$$(26.) \quad \begin{cases} 1 = -\dfrac{\sum_p \sum_q \sum_n C_p^q K_n(\lambda)\left[J_p^q(\lambda)\dfrac{dA_p^q(\lambda)}{d\lambda} - A_p^q(\lambda)\dfrac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda}\right]\cos n\omega [\mathfrak{A}_p^q(\lambda)\cos p\omega \cos q\varphi}{\sum_p \sum_q \sum_n C_p^q \left[K_n(\lambda)\left\{J_p^q(\lambda)\dfrac{dA_p^q(\lambda)}{d\lambda} - A_p^q(\lambda)\dfrac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda}\right\} - 4\pi k A_p^q(\lambda)\left\{K_n(\lambda)\dfrac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda}\right.\right.} \\ \qquad \dfrac{+\mathfrak{B}_p^q(\lambda)\cos p\omega \sin q\varphi + \mathfrak{C}_p^q(\lambda)\sin p\omega \sin q\varphi + \mathfrak{D}_p^q(\lambda)\sin p\omega \cos q\varphi]}{\left.\left. - J_p^q(\lambda)\dfrac{dK_n(\lambda)}{d\lambda}\right\}\right]\cos n\omega [\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega \cos q\varphi + \mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega \sin q\varphi + \cdots]}. \end{cases}$$

Diese Bedingungsgleichung wird identisch erfüllt, wenn gesetzt wird

$$(27.) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}(\lambda) = \mathfrak{A}_p^q(\lambda) P, \\ \mathfrak{F}(\lambda) = \mathfrak{B}_p^q(\lambda) P, \\ \mathfrak{G}(\lambda) = \mathfrak{C}_p^q(\lambda) P, \\ \mathfrak{H}(\lambda) = \mathfrak{D}_p^q(\lambda) P. \end{cases}$$

Hierbei hat P den Werth

$$(28.)\qquad P = -\frac{1}{1+\frac{4\pi k A_p^q(\lambda)}{K_n(\lambda)}\cdot\frac{J_p^q(\lambda)K_n'(\lambda)-J'^q_p(\lambda)K_n(\lambda)}{J_p^q(\lambda)A'^q_p(\lambda)-J'^q_p(\lambda)A_p^q(\lambda)}},$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\frac{dA_p^q(\lambda)}{d\lambda}=A'^q_p(\lambda),\quad \frac{dJ_p^q(\lambda)}{d\lambda}=J'^q_p(\lambda)\quad\text{und}\quad \frac{dK_n(\lambda)}{d\lambda}=K_n'(\lambda).$$

Auf die Functionen $J_p^q(\lambda)$ und $A_p^q(\lambda)$ werden wir im späteren Verlaufe unserer Untersuchung noch zu sprechen kommen; die erstere kann man auch zur Darstellung der Function K benutzen. Es ist nämlich

$$K_n'(\lambda) = \lambda\cdot J_n^o(\lambda)-\tfrac{1}{2}[J_{n+1}^o(\lambda)+J_{n-1}^o(\lambda)].$$

15. Durch die Gleichungen (28.), (27.) und (25^i.) ist die Function φ_i bestimmt. Damit das Problem, das wir uns in diesem Paragraphen gestellt haben, vollständig gelöst sei, müssen wir noch die Function U_a berechnen. Hierzu benutzen wir die in Artikel 13 bewiesene Gleichung (V.)

$$\varphi_a+v_a+U_a = 0.$$

Diese ergiebt unter Zuhülfenahme der Gleichungen (24^a.) und (25^a.)

$$(29.)\quad \begin{cases} U_a = 4\pi^2 \sum_p \sum_q \sum_n C_p^q J_p^q(\lambda)K_n(\lambda_a)A_p^q(\lambda_a)\cos n\omega_a[\mathfrak{K}(\lambda)\cos p\omega_a\cos q\varphi_a \\ \qquad\qquad \mathfrak{L}(\lambda)\cos p\omega_a\sin q\varphi_a+\mathfrak{M}(\lambda)\sin p\omega_a\sin q\varphi_a+\mathfrak{N}(\lambda)\sin p\omega_a\sin q\varphi_a], \end{cases}$$

wobei

$$(30.)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}(\lambda) &= \mathfrak{A}_p^q(\lambda).Q, \\ \mathfrak{L}(\lambda) &= \mathfrak{B}_p^q(\lambda).Q, \\ \mathfrak{M}(\lambda) &= \mathfrak{C}_p^q(\lambda).Q, \\ \mathfrak{N}(\lambda) &= \mathfrak{D}_p^q(\lambda).Q \end{cases}$$

und

$$(31.)\qquad Q=-\frac{1}{1+\frac{K_n(\lambda)}{4\pi k A_p^p(\lambda)}\cdot\frac{J_p^q(\lambda)A'^q_p(\lambda)-J'^q_p(\lambda)A_p^q(\lambda)}{J_p^q(\lambda)A'^q_p(\lambda)-J'^q_p(\lambda)A_p^p(\lambda)}}.$$

16. Die beiden Gleichungs-Systeme (31.), (30.), (29.) und (28.), (27.), (25^i.) stellen die Lösung unseres Problems dar; denn die Potentialfunction U_a bestimmt im Vereine mit φ_i den magnetischen Zustand des Ringes. Die Derivirten von U_a liefern die Kräfte, welche der Ring nach aussen ausübt, die von φ_i aber seine magnetischen Momente. So ist, um nur je ein Bei-

spiel anzuführen, die Kraft, mit welcher der magnetisirte Ring einen im Punkte $(\lambda_a, \omega_a, \varphi_a)$ befindlichen Magnetpol μ parallel zur Ring-Mittellinie forttreibt, gleich

$$(32.)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}{a(1-\lambda_a^2)}\,4\pi^2\mu \sum_p\sum_q\sum_n q\,C_p^q J_p^q(\lambda) K_n(\lambda_a) A_p^q(\lambda_a)\cos n\omega_a \\ &\quad[-\mathfrak{K}(\lambda)\cos p\omega_a\sin q\varphi+\mathfrak{L}(\lambda)\cos p\omega_a\cos q\varphi_a+\mathfrak{M}(\lambda)\sin p\omega_a\cos q\varphi_a \\ &\qquad -\mathfrak{N}(\lambda)\sin p\omega_a\sin q\varphi_a], \end{aligned} \right.$$

und das im Punkte $(\lambda_i, \omega_i, \varphi_i)$ in derselben Richtung geschätzte magnetische Moment ist gleich

$$(33.)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}{a(1-\lambda_i^2)}\,4\pi^2 k \sum_p\sum_q\sum_n q\,C_p^q J_p^q(\lambda_i) K_n(\lambda_i) A_p^q(\lambda)\cos n\omega_i \\ &\quad[-\mathfrak{E}(\lambda)\cos p\omega_i\sin q\varphi_i+\mathfrak{F}(\lambda)\cos p\omega_i\cos q\varphi_i+\mathfrak{G}(\lambda)\sin p\omega_i\cos q\varphi_i \\ &\qquad -\mathfrak{H}(\lambda)\sin p\omega_i\sin q\varphi_i]. \end{aligned} \right.$$

§ 3.

Erweiterung der Lösung für magnetisirende Kräfte mehrdeutigen Potentiales.

17. Wir wollen nunmehr unsere allgemeine Lösung für den Fall erweitern, dass das magnetische Feld ganz oder zum Theil von elektrischen Strömen verursacht wird, die den Ring umkreisen, d. i. von solchen Strömen, durch welche man keine von ihnen umrandete Fläche zu legen im Stande ist, ohne den zweifach zusammenhängenden Ringkörper in einen einfach zusammenhängenden Raum zu zerschneiden. Auf diesen Fall sind die bisherigen Schlüsse nicht anwendbar. Denn die Potentialfunction V ist dann im Innern des Ringes bekanntlich eine mehrdeutige Function, und wir dürfen daher nicht mehr wie bei den Deductionen im vorhergehenden Paragraphen das *Dirichlet*sche Princip in Anspruch nehmen. In der That giebt es jetzt keine Oberflächenbelegung mehr, deren Potential überall im Innern des Ringes mit V_i sich deckt.

In den §§ 4 und 5 seiner oben erwähnten Abhandlung hat *Kirchhoff* einen analogen Fall für den unendlichen Cylinder behandelt und daselbst eine Methode gelehrt, welche über die erwähnte Schwierigkeit hinweghilft. Ich will aber einen Kunstgriff anwenden, der hier rascher zum Ziele führt als die Anwendung der *Kirchhoff*schen Methode.

18. Wir fügen nämlich willkürlich zu jedem den Ring umkreisenden Strome S_k einen durch die Axe des Ringes fliessenden unendlich langen geradlinigen Strom S_a hinzu. Die Intensität dieses Axenstromes soll genau gleich der des Stromes S_k sein, seine Richtung aber soll definirt sein wie folgt: Wir denken uns an eine beliebige Stelle des Ringes eine menschliche Figur so hingelegt, dass ihre Füsse dem Mittelpunkte des Ringes zugekehrt sind und ihre ausgestreckten Arme zur Ringaxe parallel stehen. Sieht dann dieses Individuum den Strom S_k im Sinne des Uhrzeigers fliessen, so soll die Richtung des Axenstromes die von seiner linken zur rechten Hand sein. Im Unendlichen soll sich der Strom S_a in beliebiger Weise schliessen. Eine leichte Ueberlegung lässt dann erkennen, dass die magnetische Potentialfunction der beiden Ströme S_k und S_a zusammengenommen innerhalb des Ringes nicht mehr mehrdeutig, sondern vollkommen eindeutig ist. Es wird daher alles, was in den Artikeln 6 bis 16 ausgeführt wurde, jetzt wieder zu Recht bestehen.

Man berechne daher nach den im § 2 entwickelten Formeln die Magnetisirung, wie sie durch die Coexistenz der Ströme S_k und S_a, sowie durch die übrigen magnetisirenden Ursachen bedingt wird. Hiervon subtrahiere man dann — (das Superpositionsprincip darf ja wegen der Linearität der hierher gehörigen Differentialgleichungen ohne weiteres in Anspruch genommen werden) — die Magnetisirung des Ringes, wie sie durch die willkürlich hinzugefügten Axenströme allein verursacht wird.

19. Diese letztere Magnetisirung lässt sich aber ohne jeden Aufwand eines mathematischen Apparates lediglich auf Grund einer ganz elementaren Ueberlegung ermitteln.

Betrachtet man nämlich vorerst einen unendlich dünnen Ring, eine Ringfaser, so ist klar, dass dieselbe, wodurch und wie immer sie auch magnetisirt sein mag, auf sich selbst Kräfte ausüben wird, die gegenüber der als endlich vorausgesetzten äusseren magnetisirenden Kraft verschwinden. Die Ringfaser wird daher so magnetisirt werden, wie wenn nur diese Kraft allein vorhanden wäre. Dieselbe ist, wenn die Magnetisirung von einem unendlichen Axenstrom herrührt, durch das *Biot–Savart*sche Gesetz

$$\frac{2i}{r} \tag{34.}$$

gegeben, und ihre Richtung ist überall die der Mittellinie der Faser. Nur in dieser Richtung erfolgen daher die magnetischen Verschiebungen, an die

Oberfläche der Faser wird kein freier Magnetismus hingeschoben. Die Wirkung der so magnetisirten Faser nach aussen hin ist demnach nicht etwa bloss unendlich klein von der Grössenordnung der unendlich kleinen Dicke der Faser sondern absolut gleich Null.

Ist nunmehr der Ring von endlicher Dicke, so kann man sich denselben aus unendlich vielen unendlich dünnen Ringfasern zusammengesetzt denken, deren jede für sich allein so magnetisirt wird, dass der magnetische Momentvector zufolge der Formel (34.) den Werth hat

$$\mu = k\frac{2i}{r}, \tag{35.}$$

eine Magnetisirung, an der die Coexistenz aller übrigen Ringfasern nichts ändert. r bedeutet die Entfernung des Aufpunktes von der Ringaxe, i die Intensität des Axenstromes.

20. Für das in diesem Paragraphen gestellte Problem lautet demnach die Lösung: „Man füge zu jedem jener Ströme, die den Ring umschlingen, einen Axenstrom von der im Artikel 18 präcisirten Art hinzu und bestimme hierauf die nur von den Oberflächen-Constanten des Ringes und dem magnetisirenden Felde abhängigen Coefficienten $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{C}_p^q(\lambda)$ und $\mathfrak{D}_p^q(\lambda)$. Dann ist das Potential U_a des Ringes, abgesehen von einer Constanten, wiederum durch die Formeln (29.), (30.), (31.) gegeben. Die magnetischen Momente des Ringes aber sind gleich den Derivirten der durch die Formeln (25^{i}.), (27.), (28.) gegebenen Function φ_i, vermindert um den Werth

$$\frac{2k.\Sigma i}{r}\cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}), \tag{36.}$$

wo $\cos(\mathfrak{M}, \mathfrak{R})$ der Cosinus jenes Winkels ist, den die Mittellinie $\mathfrak{M}$ des Ringes mit der Richtung $\mathfrak{R}$ bildet, nach welcher das Moment geschätzt wird, und Σi die Intensität des resultirenden Axenstromes darstellt.“

Natürlich kann auch der Fall eintreten, dass Σi gleich Null wird, was besagt, dass man nicht immer nöthig haben wird, den Strömen, die den Ring umschlingen, Axenströme hinzuzufügen. Wenn beispielsweise ein elektrischer Strom den Ring zweimal umschlingt, so dass die Umschlingung die Form einer ∞-Schleife hat, dann ist das Potential desselben im Innern des Ringes ohnedies schon eindeutig und es bedarf der Hinzufügung eines Hülfsstromes nicht mehr.

§ 4.

Magnetisirung eines Ringes, der nur an einer einzigen Stelle von einem elektrische Strome umflossen ist.

21. Im Bisherigen wurde die Theorie der Magnetisirung eines Ringes in ihrer grössten Allgemeinheit entwickelt. In speciell vorgegebenen Fällen erübrigt lediglich die Bestimmung der vier Functionen $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$, $\mathfrak{S}_p^q(\lambda)$ und $\mathfrak{D}_p^q(\lambda)$.

Es sollen diese Functionen für den Fall bestimmt werden, dass die Magnetisirung von einem Kreisstrome herrührt, der den Ring nur an einer einzigen Stelle umfliesst. Die Gleichungen der Strombahn sollen sein

$$\begin{cases} \varphi = o, \\ \lambda = c, \end{cases}$$

wo $c \leqq \lambda_o$ ist. Durch die erste dieser Gleichungen ist schon ausgedrückt, dass wir die Umkreisungsstelle als Ausgangsort für die Zählung der Coordinate φ festsetzen. Als Ausgangslage für die Zählung der Coordinate ω soll jene Ebene gelten, welche durch die Mittellinie des Ringes bestimmt ist (die „Aequatorialebene").

22. Wir wollen nunmehr von dem im vorigen Paragraphen ausführlich erörterten Kunstgriff Gebrauch machen und unserem Kreisstrome einen unendlich langen und in der Unendlichkeit sich schliessenden Axenstrom hinzufügen, von der im Artikel 18 präcisirten Art. Die magnetische Potentialfunction der beiden Ströme bezogen auf einen Punkt, dessen λ-Coordinate kleiner ist als c, lässt sich am bequemsten durch folgende Betrachtungsweise ermitteln.

Wir construiren eine unendlich grosse keilförmige Platte so, dass deren eine Begrenzungsebene mit der Ebene unseres Kreisstromes zusammenfällt. Die Kante des Keils soll in der Ringaxe liegen, der Neigungswinkel desselben soll die unendlich kleine im übrigen aber willkürliche Grösse $d\varphi$ besitzen. Dort wo sich der Kreisstrom befindet, soll die Platte ein Loch haben, das von dem Strome umrandet wird. Diesen Keil belegen wir auf jener Seite, von der aus gesehen der Kreisstrom im Uhrzeigersinne zu fliessen scheint, mit Nordmagnetismus, auf der anderen Seite mit Südmagnetismus. Die variable Dichte δ der Belegung soll überall der Gleichung genügen

$$i = \delta . r . d\varphi,$$

wobei i die Intensität unseres Stromes und r die Entfernung des dem δ entsprechenden Flächenelementes von der Ringaxe ist. Für das magnetische Potential dieser so transversal magnetisirten keilförmigen Platte findet man unschwer folgende Formel

$$(37.)\quad V_i = i \int_c^1 d\lambda_a \int_o^{2\pi} d\omega_a \frac{4a\lambda_a}{(1-\lambda_a^2)(1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2)} \frac{dT_{ai}}{d\varphi_a},$$

und dies muss zugleich auch die magnetische Potentialfunction unserer beiden Ströme sein. T_{ai} ist hierbei die Entfernung des Punktes $(\lambda_a, \omega_a, \varphi_a)$ vom Aufpunkte $(\lambda_i, \omega_i, \varphi_i)$. Hierfür können wir im Anschluss an die Gleichung (2.) schreiben

$$T_{ai} = \sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}\sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2}$$
$$\sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) A_p^q(\lambda_a) \cos p(\omega_a-\omega_i)\cos q(\varphi_a-\varphi_i),$$

worin wir für φ_a den Werth Null noch nicht eingesetzt haben, weil nach dieser Coordinate vorerst noch zu differentiiren ist. Differentiirt man, setzt danach $\varphi_a = 0$ und substituirt den so erhaltenen Werth von $\frac{dT_{ai}}{d\varphi_a}$ in die Gleichung (37.), so erhält man

$$(38.)\quad \begin{cases} V_i = 4ai\sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2} \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) q \sin q\varphi_i \\ \qquad \cdot \int_c^1 d\lambda_a \int_o^{2\pi} d\omega_a \frac{\lambda_a A_p^q(\lambda_a)\cos p(\omega_a-\omega_i)}{(1-\lambda_a^2)\sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}}. \end{cases}$$

Das Integral nach dem Argumente $d\omega_a$ lässt sich sehr bequem auswerthen, wenn man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_a\cos\omega_a+\lambda_a^2}}$ in eine *Fourier*sche Reihe entwickelt. Man kann diese Reihe, da die Coefficienten der Sinus-Glieder verschwinden müssen, in der Form schreiben

$$\sum_m X_m(\lambda_a)\cos m\omega_a,$$

wobei die Coefficienten X_m mit Einschluss des Stellenzeigers $m = 0$ die Werthe haben

$$X_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos mx\, dx}{(1-2\lambda\cos x+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieselbe Formel erhält man, wenn man in der Gleichung (4.) $p = m$ und $q = 0$ setzt. Also ist $X_m = J_m^0(\lambda_a)$. Nach Einführung dieser Substitution in die Gleichung (38.) ergiebt die Auswerthung der Integration nach ω

$$(39.)\quad V_i = 8a\pi i\sqrt{1-2\lambda_i\cos\omega_i+\lambda_i^2} \sum_p \sum_q C_p^q J_p^q(\lambda_i) q \sin q\varphi_i \cos p\omega_i \int_c^1 d\lambda \frac{\lambda A_p^q(\lambda) J_p^0(\lambda)}{1-\lambda^2}.$$

23. Aus der soeben erhaltenen Gleichung ergeben sich für die gesuchten vier Functionen folgende Werthe

$$(40.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_p^q(\lambda) = 0, \\ \mathfrak{B}_p^q(\lambda) = \dfrac{2iaq}{\pi A_p^q(\lambda)} \displaystyle\int_c^1 d\lambda \, \frac{\lambda A_p^q(\lambda) J_p^0(\lambda)}{1-\lambda^2}, \\ \mathfrak{C}_p^q(\lambda) = 0, \\ \mathfrak{D}_p^q(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Das Verschwinden der $\mathfrak{C}_p^q(\lambda)$ und $\mathfrak{D}_p^q(\lambda)$ involvirt eine in Bezug auf die Aequatorialebene des Ringes symmetrische Vertheilung der durch die Magnetisirung des Ringes auf dessen Oberfläche ausgeschiedenen freien Magnetismen. Das Verschwinden der $\mathfrak{A}_p^q(\lambda)$ aber sagt aus, dass diese freien Magnetismen an zwei zur Ebene des Kreisstromes symmetrisch gelegenen Punkten der Ringoberfläche den absoluten Werthen nach gleich, den Zeichen nach entgegengesetzt sind.

Die Functionen $A_p^q(\lambda)$ und $J_p^0(\lambda)$ lassen sich vermittelst der *Gauss*schen (hypergeometrischen) Reihe darstellen. Es ist

$$(41.)\qquad A_p^q(\lambda) = (\tfrac{1}{8})^q \frac{(2p+1).(2p+3)\ldots(2p+2q-1)}{1.2\ldots q} \lambda^p (1-\lambda^2)^q F(q+\tfrac{1}{2},\ p+q+\tfrac{1}{2},\ 2q+1,\ 1-\lambda^2)$$

und

$$(42.)\qquad J_p^0(\lambda) = (\tfrac{1}{2})^p \frac{1.3\ldots(2p-1)}{1.2\ldots p} \lambda^p F(\tfrac{1}{2},\ p+\tfrac{1}{2},\ p+1,\ \lambda^2),$$

wo F die übliche abkürzende Bezeichnungsweise für die *Gauss*sche Reihe ist. Man erkennt dann sofort, dass das in (40.) auftretende bestimmte Integral für jeden Stellenzeiger von p und q (ausgenommen den Fall $q = 0$) die Form hat

$$(43.)\qquad \int_c^1 \lambda^m (1-\lambda^2)^n d\lambda,$$

also die eines sehr einfachen binomischen Integrals, dessen Werth für jeden Stellenzeiger von m und n sehr leicht angebbar ist. Einer besonderen Untersuchung bedarf nur der Fall $q = 0$. Hier erhält man für die obere Grenze den Werth ∞ von der Ordnung $\log \mathrm{nat} \infty$. Da jedoch die Function $\mathfrak{B}_p^q(\lambda)$ mit dem Factor q behaftet ist, der im vorliegenden Fall wie $\frac{1}{\infty}$ verschwindet, so liefern die Glieder, die mit dem Stellenzeiger $q = 0$ behaftet sind, keinen Beitrag zu unserem Integral und dürfen daher von vornherein vernachlässigt werden.

§ 5.

Bemerkung zum *Kirchhoff*schen Ringprobleme.

24. ***Kirchhoff*** hat 1870 im 5. Ergänzungsbande von *Poggendorff*s Annalen die Magnetisirung eines von einem Solenoide ganz umschlossenen Eisenringes berechnet. Man kann dieselbe auch ohne Aufwand eines mathematischen Apparates durch folgende einfache Ueberlegung erschliessen.

Wir denken uns den ganzen ausserhalb des magnetisirenden Solenoides liegenden unendlichen Raum mit lauter ringförmig geschlossenen einander unendlich benachbarten Solenoiden angefüllt, deren jedes ebensoviele (n) Windungen hat wie das Hauptsolenoid und auch von demselben Strome i durchflossen wird wie jenes; allen sei die Ringaxe gemeinsame Rotationsaxe. Die Querschnitte des Eisenringes und der Solenoide dürfen beliebig gestaltet sein.

25. Dazu ist nun zweierlei zu bemerken. Zunächst ist klar, dass durch Hinzufügung derartiger geschlossener Solenoide an dem magnetischen Felde innerhalb des Hauptsolenoides nichts geändert wird. Zweitens aber lehrt der blosse Anblick einer Figur, die man sich nach den Angaben des vorigen Artikels macht, dass die Wirkungen ***aller*** Solenoidströme, da immer je zwei unendlich benachbarte Stromtheile entgegengesetzt gerichtet fliessen, einander vollkommen vernichten, mit Ausnahme der Randtheile. Diese letzteren aber setzen sich zusammen

1. aus so vielen längs der Rotationsaxe fliessenden Strömen von der Intensität i, als jedes der Solenoide Windungen besitzt, und
2. aus ebenso vielen in der Unendlichkeit zurückfliessenden Strömen.

26. Da die Wirkung der letzteren, verschwindend klein ist, so kommt nur die der n Axenströme in Betracht. Diese aber erzeugen zufolge der Gleichung (35.), die wir im Artikel 19 gleichfalls auf ganz elementarem Wege gefunden haben, im Eisenringe ein magnetisches Moment vom Werthe

$$\mu = k\frac{2in}{r}. \tag{44.}$$

Genau denselben Werth hat ***Kirchhoff*** a. a. O. für die Magnetisirung eines von einem elektrischen Strome ganz umflossenen Eisenringes berechnet.

München, mathematisch-physikalische Staatssammlung.

Ueber den Fall der Statik, in welchem das virtuelle Moment einen negativen Werth besitzt.

(Von Herrn *L. Henneberg* in Darmstadt.)

1.

Nach *Gauss* (Werke, Band 5, Seite 35) ist bei einem Systeme von nicht freien Punkten Gleichgewicht vorhanden, sobald für keine virtuelle Verrückung das virtuelle Moment einen positiven Werth erhält. Unter Zugrundelegung dieses *Gauss*schen Principes soll im Folgenden eine Methode entwickelt werden, die sich zur Untersuchung des Falles, in welchem das virtuelle Moment negative Werthe annehmen kann, verwenden lässt.

Der Fall, dass das virtuelle Moment einen negativen Werth besitzt, tritt ein, sobald virtuelle Verrückungen vorhanden sind, die nicht umkehrbar sind, und zwar nur für diese, während für alle umkehrbaren virtuellen Verrückungen das virtuelle Moment Null wird.

Sollen virtuelle Verrückungen auftreten, welche nicht umkehrbar sind, so muss die Bewegung der materiellen Punkte an Ungleichungen geknüpft sein.

Es seien n materielle Punkte vorhanden mit den Coordinaten x_i, y_i, z_i. Auf dieselben wirken Kräfte, deren Componenten mit X_i, Y_i, Z_i bezeichnet werden sollen. Das von *Gauss* erweiterte Princip der virtuellen Verrückungen lautet dann:

$$(1.) \qquad \sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leqq 0.$$

Die Bewegung der materiellen Punkte sei an m Bedingungsgleichungen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \end{cases}$$

und an k Ungleichungen von der Form

$$(3.)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) \geqq 0, \\ \varphi_2(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) \geqq 0, \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) \geqq 0 \end{cases}$$

geknüpft. Dann ist die Voraussetzung statthaft, dass die Coordinaten der materiellen Punkte in die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ eingesetzt denselben den Werth Null ertheilen, da sonst die Ungleichungen, falls sie überhaupt erfüllt wären, gar keinen Einfluss auf das Gleichgewicht besitzen würden.

Aus den Gleichungen (2.) und den Ungleichungen (3.) folgen für die virtuellen Verrückungen die m Gleichungen:

$$(2^a.)\qquad \begin{cases} \sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \\ \sum_i \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_2}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_2}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \\ \vdots \\ \sum_i \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_m}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_m}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \end{cases}$$

und die k Ungleichungen:

$$(3^a.)\qquad \begin{cases} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqq 0, \\ \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqq 0, \\ \vdots \\ \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i}\delta z_i\right) \geqq 0. \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (2ª.) mit Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, die Ungleichungen (3ª.) mit Multiplicatoren $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ multiplicirt und zur Ungleichung (1.) addirt, so ergiebt sich eine Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned} \sum_i \Big[(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) + \cdots \\ \cdots + \mu_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}\delta z_i\right) + \cdots\Big] \end{aligned}\right\} \leqq 0,$$

beziehungsweise eine Ungleichung

$$\left.\begin{aligned}\sum_i \Big[&\Big(X_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}+\cdots\Big)\delta x_i\\ &+\Big(Y_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}+\cdots\Big)\delta y_i\\ &+\Big(Z_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i}+\cdots\Big)\delta z_i\Big]\end{aligned}\right\}\leqq 0,$$

welche erfüllt ist für beliebige Werthe der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, sowie für beliebige negative Werthe der Multiplicatoren $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. Dies ist nur möglich, wenn sich endliche Werthe der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, sowie endliche negative Werthe der Multiplicatoren $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ finden lassen, durch welche die $3n$ Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} 0 = X_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}+\cdots,\\ 0 = Y_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i}+\cdots,\\ 0 = Z_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_i}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_i}+\cdots+\mu_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i}+\mu_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i}+\cdots \end{cases}$$

befriedigt werden.

Hiermit sind die für die Statik specialisirten *Lagrange*schen Differentialgleichungen erster Art auf den Fall des Vorhandenseins von Ungleichungen ausgedehnt.

2.

Bei Einführung von k Parametern $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, welche auf positive Werthe beschränkt sind, können die k Ungleichungen (3.) geschrieben werden:

$$(5.)\qquad \varphi_1 = \tau_1, \quad \varphi_2 = \tau_2, \quad \ldots, \quad \varphi_k = \tau_k.$$

Dann lassen sich die Coordinaten der n materiellen Punkte mit Hülfe der Gleichungen (2.) und (5.) ausdrücken als Functionen von $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ und von $3n-m-k$ weiteren Parametern $p_1, p_2, \ldots, p_{3n-m-k}$:

$$(6.)\qquad \begin{cases} x_i = F_i(p_1, p_2, \ldots, p_{3n-m-k}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k),\\ y_i = \Phi_i(p_1, p_2, \ldots, p_{3n-m-k}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k),\\ z_i = \Psi_i(p_1, p_2, \ldots, p_{3n-m-k}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k). \end{cases}$$

Die virtuellen Verrückungen werden demgemäss:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \delta x_i = \sum_{h=1}^{3n-m-k}\frac{\partial F_i}{\partial p_h}\cdot\delta p_h+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial F_i}{\partial \tau_r}\cdot\delta\tau_r,\\ \delta y_i = \sum_{h=1}^{3n-m-k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_h}\cdot\delta p_h+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau_r}\cdot\delta\tau_r,\\ \delta z_i = \sum_{h=1}^{3n-m-k}\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_h}\cdot\delta p_h+\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau_r}\cdot\delta\tau_r \end{cases}$$

und das virtuelle Moment:

$$(8.)\quad \begin{cases} \sum_i (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum_{h=1}^{3n-m-k} \delta p_h \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial F_i}{\partial p_h} + Y_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_h} + Z_i\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_h}\right) \\ \qquad\qquad + \sum_{r=1}^{k}\delta\tau_r \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial F_i}{\partial \tau_r} + Y_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau_r} + Z_i\frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau_r}\right). \end{cases}$$

Nach *Gauss* besteht Gleichgewicht, sobald das virtuelle Moment für sämmtliche virtuellen Verrückungen keinen positiven Werth erhält. Da die Grössen δp_h beliebige positive und negative unendlich kleine Werthe, die Grössen $\delta\tau_r$ beliebige positive unendlich kleine Werthe annehmen dürfen, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes:

Es müssen die $3n-m-k$ Gleichungen

$$(9.)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial F_i}{\partial p_h} + Y_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_h} + Z_i\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_h}\right) = 0$$

und die k Ungleichungen

$$(10.)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial F_i}{\partial \tau_r} + Y_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau_r} + Z_i\frac{\partial \Psi_i}{\partial \tau_r}\right) \leqq 0$$

erfüllt sein.

3.

Besonders einfache Form nehmen die Gleichungen (9.) und die Ungleichungen (10.) an, wenn eine von den Coordinaten der Punkte abhängige Kräftefunction U vorhanden ist, so dass

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Es wird dann

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial p_h} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial p_h} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial p_h} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial p_h}\right), \\ \frac{\partial U}{\partial \tau_r} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \tau_r} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \tau_r} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial y_i}{\partial \tau_r}\right), \end{cases}$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial p_h} = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial p_h} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial p_h} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial p_h}\right)$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial \tau_r} = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial \tau_r} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial \tau_r} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial \tau_r}\right).$$

Da die Gleichungen (9.) und die Ungleichungen (10.) auch geschrieben werden können:

$$(9^a.) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial p_h}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial p_h}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial p_h}\right)=0,$$

$$(10^a.) \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial \tau_r}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial \tau_r}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial \tau_r}\right)\leqq 0,$$

so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die $3n-m-k$ Gleichungen

$$(11.) \qquad \frac{\partial U}{\partial p_h}=0$$

und die k Ungleichungen

$$(12.) \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau_r}\leqq 0$$

erfüllt sind.

4.

Aufgabe.

Zwei Punkte A und B können sich nur auf dem Kreise

$$x^2+y^2=r^2$$

in der Ebene $z=0$ bewegen. Ausserdem sollen nur solche Bewegungen der beiden Punkte möglich sein, bei denen dieselben sich nicht weiter von einander entfernen. Es sind die Bedingungen des Gleichgewichtes aufzustellen, wenn auf die Punkte A und B Kräfte mit den Componenten X_1, Y_1 und X_2, Y_2 wirken.

Die rechtwinkligen Coordinaten von A und B seien mit x_1, y_1 und x_2, y_2, resp. die Polarwinkel mit φ_1 und φ_2 bezeichnet, so dass

$$x_1=r\cos\varphi_1, \quad x_2=r\cos\varphi_2,$$
$$y_1=r\sin\varphi_1, \quad y_2=r\sin\varphi_2,$$

und zwar sei hierbei das Coordinatensystem so gewählt, dass

$$\varphi_2>\varphi_1$$

und

$$\alpha=\varphi_2-\varphi_1$$

zwischen den Grössen 0 und π sich befindet.

Die Bewegung der beiden Punkte A und B ist dann an die Ungleichung

$$\alpha-(\varphi_2-\varphi_1)\geqq 0,$$

resp. nach Einführung eines Parameters τ, welcher auf positive Werthe be-

schränkt ist, an die Gleichung

$$\alpha-(\varphi_2-\varphi_1) = \tau$$

gebunden. Für die beiden Winkel φ_1 und φ_2 ergiebt sich dann

$$\varphi_1 = \tau+p,$$
$$\varphi_2 = \alpha+p,$$

wobei der weitere Parameter p alle positiven und negativen Werthe annehmen darf.

Die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Punkte A und B werden:

$$x_1 = r\cos(\tau+p), \quad x_2 = r\cos(\alpha+p),$$
$$y_1 = r\sin(\tau+p), \quad y_2 = r\sin(\alpha+p)$$

und deren Ableitungen nach den Parametern:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = -r\sin(\tau+p) = -y_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = -r\sin(\tau+p) = -y_1,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial p} = r\cos(\tau+p) = x_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \tau} = r\cos(\tau+p) = x_1,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial p} = -r\sin(\alpha+p) = -y_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \tau} = 0,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial p} = r\cos(\alpha+p) = x_2, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \tau} = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (9ª.) und die Ungleichung (10ª.) folgen für das Gleichgewicht die Bedingungen

$$Y_1x_1-X_1y_1+Y_2x_2-X_2y_2 = 0,$$
$$Y_1x_1-X_1y_1 \leqq 0$$

oder

$$\text{(a.)} \qquad \begin{cases} Y_1x_1-X_1y_1 = -a^2, \\ Y_2x_2-X_2y_2 = a^2, \end{cases}$$

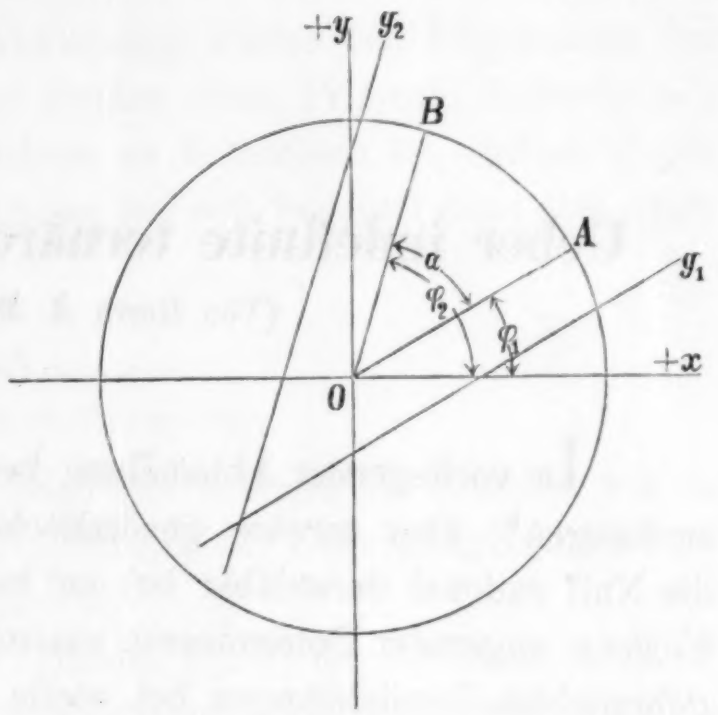
wobei a jedén reellen Werth besitzen kann.

Werden die Coordinaten des Endpunktes der in A angreifenden Kraft X_1, Y_1 mit ξ_1, η_1, diejenigen des Endpunktes der in B angreifenden Kraft X_2, Y_2 mit ξ_2, η_2 bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (a.):

$$\text{(b.)} \qquad \begin{cases} y_1\xi_1-x_1\eta_1 = a^2, \\ y_2\xi_2-x_2\eta_2 = -a^2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass im Falle des Gleichgewichtes die End-

punkte der in A und B angreifenden Kräfte auf zwei Geraden g_1 und g_2 liegen müssen, welche parallel sind zu den beiden Radien OA und OB, von den Punkten A und B dieselben Entfernungen haben und welche die Schenkel des Winkels AOB nicht schneiden.



Andererseits lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen auch mit Hülfe der Gleichungen (4.) aufstellen. Die Bewegung der beiden Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 in der Ebene $z = 0$ ist den Bedingungen unterworfen:

$$x_1^2+y_1^2-r^2 = 0,$$
$$x_2^2+y_2^2-r^2 = 0,$$
$$l^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2 \gtreqless 0,$$

wo l die Entfernung der beiden Punkte bedeutet. Die Gleichungen (4.) liefern für das Gleichgewicht die Bedingungen:

$$0 = X_1+\lambda_1 x_1-\mu(x_1-x_2), \quad 0 = X_2+\lambda_2 x_2+\mu(x_1-x_2),$$
$$0 = Y_1+\lambda_1 y_1-\mu(y_1-y_2), \quad 0 = Y_2+\lambda_2 y_2+\mu(y_1-y_2),$$

in welchen λ_1 und λ_2 beliebig sind, während μ nur negative Werthe erhalten darf.

Durch Elimination von λ_1 und λ_2 ergiebt sich:

$$Y_1 x_1-X_1 y_1 = \mu(x_1 y_2-x_2 y_1),$$
$$Y_2 x_2-X_2 y_2 = -\mu(x_1 y_2-x_2 y_1).$$

Der Ausdruck $x_1 y_2-x_1 y_1$ stellt den doppelten Inhalt des Dreieckes AOB dar. Da das Coordinatensystem oben so gewählt ist, dass dieser Ausdruck einen positiven Werth erhält, und μ nur negativ oder Null sein kann, so darf gesetzt werden

$$\mu(x_1 y_2-x_2 y_1) = -a^2.$$

Dann ergeben sich zwei Gleichungen

$$Y_1 x_1-X_1 y_1 = -a^2,$$
$$Y_2 x_2-X_2 y_2 = a^2,$$

welche übereinstimmen mit den Gleichungen (a.).

Ueber indefinite ternäre quadratische Formen.

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

In vorliegender Abhandlung beabsichtige ich meine früheren Untersuchungen*) über ternäre quadratische Nullformen (Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist) auf beliebige indefinite ternäre quadratische Formen ungerader Determinante auszudehnen. Dabei behalte ich die früher gebrauchten Bezeichnungen bei, stelle sie jedoch der Bequemlichkeit wegen hier noch einmal zusammen:

Die (indefinite) ternäre Form bezeichne ich nach *Gauss* durch

$$f = ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'x''x+2b''xx' = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix},$$

ihre Determinante

$$ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b''$$

setze ich positiv und ungerade voraus, die Form f primitiv. Sie ist dann eigentlich primitiv, d. h. die Coefficienten a, a', a'', b, b', b'' sind ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler und a, a', a'' nicht alle gerade. Die Coefficienten der ternären Form

$$\begin{pmatrix} b^2-a'a'', & b'^2-a''a, & b''^2-aa' \\ ab-b'b'', & a'b'-b''b, & a''b''-bb' \end{pmatrix}$$

mögen den grössten gemeinschaftlichen (positiven) Theiler Ω haben. Durch Weghebung desselben entsteht die (primitive) adjungirte Form von f,

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}, \quad (\Omega A = b^2-a'a'', \text{ u. s. w.}).$$

Die Determinante von f ist durch Ω^2 theilbar; sie sei $= \Omega^2 \Delta$; diejenige von F ist dann $= \Delta^2 \Omega$. Die Zahlen Ω, Δ sind positiv und heissen die *Invarianten* von f.

Bezüglich der Eintheilung der ternären Formen in Geschlechter er-

*) Dieses Journal, Bd. 98.

laube ich mir auf die Abhandlungen von *Eisenstein**) und *Smith***) zu verweisen.

In der Folge werde ich zur Abkürzung wieder den Exponenten der höchsten in einer Zahl m aufgehenden Potenz einer Primzahl θ durch $|m|_\theta$ bezeichnen oder, wo kein Missverständniss zu befürchten ist, einfach durch $|m|$ und $m = \theta^{|m|} m_0$ setzen. Die Gleichung $|m| = 0$ bedeutet dann also, dass m nicht durch θ theilbar sei.

§ 1.

Die Grundlagen der Untersuchung.

1. Das Verfahren, dessen ich mich hier bediene, ist dasselbe wie in der schon erwähnten Arbeit über die Nullformen, der Uebergang von Formen kleinerer zu Formen grösserer Invarianten.

Es bedeute θ eine ungerade Primzahl, θ^ω, θ^δ die höchsten in Ω, Δ aufgehenden Potenzen derselben. Dann kommen folgende zwei Sätze in Anwendung:

1) *Jede eigentlich primitive Form f der Invarianten $\Omega\theta$, Δ, für welche $\delta = 1$ ist, lässt sich durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante θ aus einer eigentlich primitiven Form der Invarianten Ω, Δ ableiten.*

Beweis: Die Form f ist einer Form g äquivalent***), welche

$$\equiv \alpha x^2 + \alpha' \theta^{\omega+1} x'^2 + \alpha'' \theta^{\omega+2} x''^2 \pmod{\theta^t},$$

wo α, α', α'' durch θ nicht theilbar sind und $t > \omega+3$ ist. Daher geht g durch die Substitution

$$y = x, \quad y' = \theta x'', \quad y'' = -x' \tag{1.}$$

aus einer Form g' hervor, welche eigentlich primitiv und

$$\equiv \alpha y^2 + \alpha'' \theta^\omega y'^2 + \alpha' \theta^{\omega+1} y''^2 \pmod{\theta^{t-2}}$$

ist und daher die Invarianten Ω, Δ besitzt, und f entsteht aus g' durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante θ.

2) *Jede eigentlich primitive Form f der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$ lässt sich durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante θ aus einer eigentlich primitiven Form der Invarianten Ω, Δ ableiten.*

---

*) Neue Theoreme der höheren Arithmetik, dieses Journal, Bd. 35.

**) On the orders and genera of ternary quadratic forms, Phil. Transactions, vol. 157.

***) *Smith*, a. a. O. p. 26. — *Minkowski*, Sur la théorie des formes quadratiques etc., Mém. des sav. étrangers t. 29, p 19.

Denn die Form f ist einer Form g äquivalent, welche

$$\equiv \alpha x^2+\alpha'\theta^\omega x'^2+\alpha''\theta^{\omega+\delta+2}x''^2 \pmod{\theta^t}$$

ist, wo wieder α, α', α'' prim sind zu θ und $t>\omega+\delta+2$. Durch die Substitution

$$(2.) \qquad y=x, \quad y'=x', \quad y''=\theta x''$$

geht also g hervor aus einer Form g', welche eigentlich primitiv und

$$\equiv \alpha y^2+\alpha'\theta^\omega y'^2+\alpha''\theta^{\omega+\delta}y''^2 \pmod{\theta^{t-2}}$$

ist, daher die Invarianten Ω, Δ besitzt und durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante θ in f übergeht.

Man wird also alle eigentlich primitiven Formen der Invarianten $\Omega\theta$, Δ (für $\delta=1$) und Ω, $\Delta\theta^2$ erhalten (jede unendlich oft), wenn man auf alle eigentlich primitiven Formen der Invarianten Ω, Δ bezw. die Substitutionen (1.) und (2.) anwendet, oder auch, wenn man auf jede Form eines vollständigen Systems Σ nicht äquivalenter, eigentlich primitiver Formen der Invarianten Ω, Δ alle möglichen ganzzahligen Substitutionen der Determinante θ anwendet. Jede der letzteren Substitutionen lässt sich aber zusammensetzen aus einer vorausgehenden *reducirten* Substitution der Determinante θ, d. h. aus einer Substitution der Form

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ \alpha' & \beta' & 0\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{pmatrix}, \quad \alpha\beta'\gamma''=\theta, \quad 0\leqq\alpha'<\beta', \quad 0\leqq\alpha''<\gamma'', \quad 0\leqq\beta''<\gamma'',$$

und einer nachfolgenden Substitution der Determinante 1. Man wird daher (nebst anderen) alle Formenklassen (jede mehrmals) sowohl der Invarianten $\Omega\theta$, Δ (für $\delta=1$) als auch der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$ erhalten, wenn man auf jede Form von Σ jede der Substitutionen S anwendet.

2. Es ist zunächst zu untersuchen, unter welcher Bedingung die Substitution S, auf eine Form f von Σ angewendet, 1) eine Form der Invarianten $\Omega\theta$, Δ, 2) eine Form der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$ liefert.

Es sei die Form

$$f=\begin{pmatrix}a, & a', & a''\\ b, & b', & b''\end{pmatrix}, \quad \text{ihre Adjungirte} \quad F=\begin{pmatrix}A, & A', & A''\\ B, & B', & B''\end{pmatrix},$$

wo

$$a'=a'_0\theta^\omega, \qquad a''=a''_0\theta^{\omega+\delta}, \quad b\equiv b'\equiv b''\equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta+1}},$$
$$A=A_0\theta^{\omega+\delta}, \quad A'=A'_0\theta^\delta, \quad B\equiv B'\equiv B''\equiv 0 \pmod{\theta^{\delta+1}},$$
$$\Omega=\Omega_0\theta^\omega, \qquad \Delta=\Delta_0\theta^\delta,$$

a, a'_0, a''_0, A_0, A'_0, A'' durch θ nicht theilbar, aA'' prim zu $\Omega\Delta$, Voraus-

setzungen, die sich durch unimodulare ganzzahlige Transformation von f immer erfüllen lassen. Durch die Substitution S gehe f über in die Form

$$f_1 = \begin{pmatrix} a_1, & a_1', & a_1'' \\ b_1, & b_1', & b_1'' \end{pmatrix}, \quad \text{mit der Adjungirten} \quad F_1 = \begin{pmatrix} A_1, & A_1', & A_1'' \\ B_1, & B_1', & B_1'' \end{pmatrix},$$

wo

$$\begin{aligned}
a_1 &= a\alpha^2 + a'\alpha'^2 + a''\alpha''^2 + 2b\alpha'\alpha'' + 2b'\alpha''\alpha + 2b''\alpha\alpha', \\
a_1' &= a'\beta'^2 + a''\beta''^2 + 2b\beta'\beta'', \\
a_1'' &= a''\gamma''^2, \\
b_1 &= a''\beta''\gamma'' + b\beta'\gamma'', \\
b_1' &= a''\gamma''\alpha'' + b\gamma''\alpha' + b'\gamma''\alpha, \\
b_1'' &= a'\alpha'\beta' + a''\alpha''\beta'' + b(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha'') + b'\alpha\beta'' + b''\alpha\beta'.
\end{aligned}$$

1) Es sei $\delta = 1$; unter welcher Bedingung ist dann f_1 primitiv und besitzt die Invarianten $\Omega\theta$, Δ?

Obige Gleichungen geben folgende Congruenzen (mod. $\theta^{\omega+1}$):

$$a_1 \equiv a\alpha^2 + a'\alpha'^2, \quad a_1' \equiv a'\beta'^2, \quad b_1'' \equiv a'\alpha'\beta';$$

daher, da

$$b_1''^2 - a_1 a_1' \equiv -aa'\alpha^2\beta'^2 \equiv -aa_0'\theta^\omega\alpha^2\beta'^2$$

durch $\theta^{\omega+1}$ theilbar sein muss,

$$\alpha\beta' \equiv 0 \pmod{\theta},$$

und weil $\alpha\beta'\gamma'' = \theta$ ist, entweder:

(A.) $$\alpha = \theta, \quad \beta' = \gamma'' = 1, \quad \alpha' = \alpha'' = \beta'' = 0,$$

oder:

(B.) $$\alpha = 1, \quad \beta' = \theta, \quad \gamma'' = 1, \quad 0 \leqq \alpha' < \theta, \quad \alpha'' = \beta'' = 0.$$

Die Annahme (A.) liefert die Form

$$f_1 = f_A = \begin{pmatrix} a\theta^2, & a', & a'' \\ b, & b'\theta, & b''\theta \end{pmatrix},$$

welche jedoch nur für $\omega = 0$ primitiv ist und daher für $\omega > 0$ ausser Betracht fällt. Für $\omega = 0$ hat sie die Adjungirte

$$F_A = \begin{pmatrix} A_0, & A_0'\theta^2, & A''\theta \\ B\theta, & B', & B'' \end{pmatrix}.$$

Die Annahme (B.) giebt die Form

$$f_1 = f_B = \begin{pmatrix} a + 2b''\alpha' + a'\alpha'^2, & a'\theta^2, & a'' \\ b\theta, & b\alpha' + b', & a'\theta\alpha' + b''\theta \end{pmatrix},$$

welche nur dann primitiv ist, wenn θ nicht in $a+a'\alpha'^2$ aufgeht. Für $\omega > 0$ ist diese Bedingung jedenfalls erfüllt, ebenso für $\omega = 0$, wenn, in der *Gauss*schen Bezeichnung des quadratischen Charakters*), $-aa'N\theta$ ist. Ist dagegen $\omega = 0$ und $-aa'R\theta$, so fallen die der Congruenz $a+a'\alpha'^2 \equiv 0 \pmod{\theta}$ genügenden beiden Werthe von α' ausser Betracht. Die Adjungirte von f_B ist

$$F_B = \begin{pmatrix} A_0\theta^{\omega+2}, & A_0'-2B_1''\alpha'+A_0\theta^{\omega}\alpha'^2, & A''\theta \\ B-B'\alpha', & B'\theta, & B''-A_0\theta^{\omega+1}\alpha' \end{pmatrix},$$

wo $B'' = B_1''\theta$ gesetzt ist.

Dass die übrig gebliebenen Formen in der That die Invarianten $\Omega\theta$, Δ besitzen, ist leicht zu sehen. Die Gesammtzahl der zulässigen Formen f_A und f_B beträgt also θ für $\omega > 0$ und $\theta - \left(\frac{-aa'}{\theta}\right)$ für $\omega = 0$.

2) Unter welcher Bedingung ist f_1 primitiv und besitzt die Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$?

In diesem Falle sind drei Arten von Substitutionen S zu unterscheiden:

$$A = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha' & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \theta \end{pmatrix}.$$

$$(0 \leqq \alpha' < \theta), \quad (0 \leqq \alpha'' < \theta,\ 0 \leqq \beta'' < \theta).$$

Sie liefern die Formen f_A und f_B wie vorhin und ausserdem die Form

$$f_C = \begin{pmatrix} a+2b'\alpha''+a''\alpha''^2, & a'+2b\beta''+a''\beta''^2, & a''\theta^2 \\ (a''\beta''+b)\theta, & (a''\alpha''+b')\theta, & a''\alpha''\beta''+b\alpha''+b'\beta''+b'' \end{pmatrix}.$$

Die Form f_A ist jetzt nur zulässig, wenn $\omega = \delta = 0$ ist,

f_B nur dann, wenn $\delta = 0$ ist und zugleich entweder $\omega > 0$ oder $\omega = 0$, $|a+a'\alpha'^2| = 0$,

f_C nur, wenn $\delta > 0$ oder wenn $\delta = 0$ und zugleich entweder $\omega > 0$, $|a_0'+a_0''\beta''^2| = 0$ oder $\omega = 0$, $|A\alpha''^2+A'\beta''^2+A''| = 0$.

Unter diesen Bedingungen sind die adjungirten Formen

$$F_A = \begin{pmatrix} A, & A'\theta^2, & A''\theta^2 \\ B\theta^2, & B'\theta, & B''\theta \end{pmatrix},$$

$$F_B = \begin{pmatrix} A\theta^2, & A'-2B''\alpha'+A\alpha'^2, & A''\theta^2 \\ (B-B'\alpha')\theta, & B'\theta^2, & (-A\alpha'+B'')\theta \end{pmatrix},$$

$$F_C = \begin{pmatrix} A\theta^2, & A'\theta^2, & A\alpha''^2+A'\beta''^2+A''-2B\beta''-2B'\alpha''+2B''\alpha''\beta'' \\ (-A'\beta''+B-B''\alpha'')\theta, & (-A\alpha''+B'-B''\beta'')\theta, & B''\theta^2 \end{pmatrix}.$$

*) Disq. arithm. Art. 131.

Die Anzahl der zulässigen Formen f_A, f_B, f_C ist demnach, wenn

$\omega \geqq 0$, $\delta > 0$: θ^2 (nur Formen f_C),

$\omega > 0$, $\delta = 0$: $\theta\left(\theta - \left(\frac{-a_0' a_0''}{\theta}\right)\right)$, d. h. θ Formen f_B und $\theta\left(\theta - 1 - \left(\frac{-a_0' a_0''}{\theta}\right)\right)$ Formen f_C,

$\omega = 0$, $\delta = 0$: θ^2, d. h. die Form f_A, $\theta - 1 - \left(\frac{-aa'}{\theta}\right)$ Formen f_B und $\theta(\theta-1) + \left(\frac{-AA'}{\theta}\right)$ Formen f_C.

3. Bezüglich der Geschlechter, denen die erhaltenen Formen angehören, gilt Folgendes:

1) Die Formen der Invarianten $\Omega\theta$, Δ, die derselben Form f entstammen, gehören, wenn $\omega > 0$, alle demselben Geschlechte an, für welches

$$\left(\frac{f_B}{\theta}\right) = \left(\frac{f}{\theta}\right), \quad \left(\frac{F_B}{\theta}\right) = \left(\frac{-\Delta_0}{\theta}\right)\left(\frac{f_B}{\theta}\right)\left(\frac{F}{\theta}\right),$$

wie die aus der Gleichung $B^2 - A'A'' = a\Delta$ folgende Congruenz

$$-A_0' A'' \equiv a\Delta_0 \pmod{\theta}$$

sofort zeigt.

Ist $\omega = 0$, so zerfallen die Formen in zwei Geschlechter mod. θ, da, wenn $\theta > 3$ ist, $\left(\frac{f_B}{\theta}\right) = \left(\frac{a + a'\alpha'^2}{\theta}\right) = \pm 1$ sein kann. Der Fall $\theta = 3$ bildet eine Ausnahme, wenn $aa' \equiv 2 \pmod{3}$. Da nämlich $a + a'\alpha'^2$ nicht durch 3 theilbar sein darf, so kann dann nur $\alpha' \equiv 0 \pmod{3}$, also $\left(\frac{f_B}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)$ sein; dafür ist aber $\left(\frac{f_A}{3}\right) = -\left(\frac{a}{3}\right)$. Für $\left(\frac{F_B}{\theta}\right)$ ergiebt sich dieselbe Gleichung wie vorhin, ebenso die entsprechende für $\left(\frac{F_A}{\theta}\right)$, so dass in allen Fällen ist

$$(\theta.) \qquad \left(\frac{F_1}{\theta}\right) = \left(\frac{-\Delta_0}{\theta}\right)\left(\frac{f_1}{\theta}\right)\left(\frac{F}{\theta}\right).$$

In Bezug auf einen von θ verschiedenen Primfactor θ' von Ω oder Δ ist offenbar bezw.

$$(\theta'.) \qquad \left(\frac{f_1}{\theta'}\right) = \left(\frac{f}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{F_1}{\theta'}\right) = \left(\frac{\theta}{\theta'}\right)\left(\frac{F}{\theta'}\right).$$

2) Die Formen f_1 der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$ gehören, wenn $\delta > 0$, alle demselben Geschlechte an; denn es ist $\left(\frac{F_C}{\theta}\right) = \left(\frac{F}{\theta}\right)$ und, wenn $\omega > 0$, auch $\left(\frac{f_C}{\theta}\right) = \left(\frac{f}{\theta}\right)$.

Ist $\delta = 0$, $\omega > 0$, so gehören die Formen f_B demselben Geschlechte an, da

$$\left(\frac{f_B}{\theta}\right) = \left(\frac{f}{\theta}\right), \quad \left(\frac{F_B}{\theta}\right) = \left(\frac{A'}{\theta}\right);$$

die Formen f_C dagegen gehören, wenn $\theta > 3$ oder $\theta = 3$, $A'A'' \equiv 1 \pmod 3$, zwei Geschlechtern an, da $\left(\frac{f_C}{\theta}\right) = \left(\frac{f}{\theta}\right)$ ist und $\left(\frac{F_C}{\theta}\right) = \left(\frac{A'\beta''^2 + A''}{\theta}\right) = \pm 1$ sein kann. Jedoch, wenn $\theta = 3$ und $A'A'' \equiv 2 \pmod 3$, kann nur $\left(\frac{F_C}{3}\right) = \left(\frac{A''}{3}\right)$ sein; dann ist aber $\left(\frac{F_B}{3}\right) = -\left(\frac{F_C}{3}\right)$ und die Formen f_B und f_C gehören verschiedenen Geschlechtern an.

Ist $\delta = 0$, $\omega = 0$, so ist

$$\left(\frac{F_A}{\theta}\right) = \left(\frac{A}{\theta}\right), \quad \left(\frac{F_B}{\theta}\right) = \left(\frac{A\alpha'^2 + A'}{\theta}\right), \quad \left(\frac{F_C}{\theta}\right) = \left(\frac{A\alpha''^2 + A'\beta''^2 + A''}{\theta}\right).$$

Die Formen f_C gehören demnach zwei Geschlechtern an, ebenso die Formen f_B, ausgenommen, wenn $\theta = 3$, $AA' \equiv 2 \pmod 3$; dann ist aber $\left(\frac{F_B}{3}\right) = \left(\frac{A'}{3}\right) = -\left(\frac{F_A}{3}\right)$.

Für einen von θ verschiedenen Primfactor θ' von Ω oder Δ ist bezw. stets

$$\left(\frac{f_1}{\theta'}\right) = \left(\frac{f}{\theta'}\right), \quad \left(\frac{F_1}{\theta'}\right) = \left(\frac{F}{\theta'}\right).$$

Es ergiebt sich also, dass die derselben Form f entstammenden Formen f_1 der Invarianten $\Omega\theta$, Δ in ein oder zwei Geschlechter gehören, je nachdem $\omega > 0$ oder $= 0$ ist, und ebenso die Formen f_1 der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$, je nachdem $\delta > 0$ oder $= 0$ ist.

In beiden Fällen liefern verschiedene Geschlechter von Formen f auch verschiedene Geschlechter von Formen f_1.

4. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, welche von den derselben Form f entstammenden und demselben Geschlechte angehörenden Formen f_1 äquivalent sind, wobei bekanntlich der Unterschied zwischen eigentlicher und uneigentlicher Aequivalenz wegfällt. Auch bei dieser Untersuchung sind verschiedene Fälle getrennt zu behandeln:

1) Die Formen f_B der Invarianten $\Omega\theta$, Δ.

Es seien f_B und $f_B^{(1)}$ zwei solche Formen, die den Werthen α' und α_1'

entsprechen, so ist nach Voraussetzung das Product $(a+a'\alpha'^2)(a+a'\alpha_1'^2)$ durch θ nicht theilbar und quadratischer Rest von θ.

Angenommen f_B und $f_B^{(1)}$ seien äquivalent und f_B gehe in $f_B^{(1)}$ über durch die (unimodulare ganzzahlige) Substitution

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix},$$

so geht f in sich selbst über durch die (automorphe) Substitution

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha' & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1'}{\theta} & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi - \alpha_1' \frac{\eta}{\theta} & \frac{\eta}{\theta} & \zeta \\ \alpha'\xi + \theta\xi' - \alpha'\alpha_1' \frac{\eta}{\theta} - \alpha_1'\eta' & \alpha' \frac{\eta}{\theta} + \eta' & \alpha'\zeta + \theta\zeta' \\ \xi'' - \alpha_1' \frac{\eta''}{\theta} & \frac{\eta''}{\theta} & \zeta'' \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten dieser Substitution sind aber ganze Zahlen; denn setzt man zur Abkürzung

$$f_B = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}, \quad f_B^{(1)} = \begin{pmatrix} m_1, & m_1', & m_1'' \\ n_1, & n_1', & n_1'' \end{pmatrix},$$

so ist unter den in Art. 2 gemachten Voraussetzungen über die Coefficienten von f und weil jetzt $\delta = 1$ ist:

$$|m| = 0, \ |m'| = \omega+2, \ |m''| = \omega+1, \ |n| > \omega+1, \ |n'| > \omega+1, \ |n''| \geqq \omega+1;$$

ebenso für die Coefficienten von $f_B^{(1)}$. Nun geben die Gleichungen für die Transformation Ξ von f_B in $f_B^{(1)}$ die Congruenzen:

$$m_1 \equiv m\xi^2 \pmod{\theta}, \ 0 \equiv m\eta^2 + m''\eta''^2 + 2n''\eta\eta' \pmod{\theta^{\omega+2}}, \ 0 \equiv \xi\eta \pmod{\theta^{\omega+1}},$$

aus denen folgt

$$|\xi| = 0, \quad \eta \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+1}}, \quad \eta'' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Also können f_B und $f_B^{(1)}$ nur äquivalent sein, wenn es eine ganzzahlige Transformation A von f in sich selbst giebt, für welche die Substitution

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha'}{\theta} & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1' & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+\alpha_1'\mu & \theta\mu & \nu \\ \frac{1}{\theta}(\lambda'+\alpha_1'\mu'-\alpha'(\lambda+\alpha_1'\mu)) & \mu'-\alpha'\mu & \frac{1}{\theta}(\nu'-\alpha'\nu) \\ \lambda''+\alpha_1'\mu'' & \theta\mu'' & \nu'' \end{pmatrix}$$

ebenfalls ganzzahlig wird, so dass also die Congruenzen bestehen

$$\lambda'+\alpha_1'\mu'-\alpha'(\lambda+\alpha_1'\mu) \equiv 0, \quad \nu'-\alpha'\nu \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Die zweite Congruenz ist indessen von selbst erfüllt; denn ist $\omega = 0$, so giebt die automorphe Transformation A die Congruenzen mod.θ:

$$a \equiv a\lambda^2+a'\lambda'^2, \quad 0 \equiv a\nu^2+a'\nu'^2, \quad 0 \equiv a\lambda\nu+a'\lambda'\nu',$$

aus denen durch Elimination von a und a' folgt:

$$\nu' \equiv \lambda(\lambda\nu'-\nu\lambda'), \quad 0 \equiv \nu(\lambda\nu'-\nu\lambda'),$$

und hieraus folgt stets

$$\nu \equiv \nu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Ist $\omega > 0$, so kommt

$1 \equiv \lambda^2 \pmod{\theta}$, $0 \equiv \mu^2 \pmod{\theta}$, $0 \equiv a\nu^2+a'\nu'^2 \pmod{\theta^{\omega+1}}$, $0 \equiv \lambda\nu \pmod{\theta^\omega}$;

daher

$$|\lambda| = 0, \quad \mu \equiv 0 \pmod{\theta}, \quad \nu \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}, \quad \nu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Hieraus folgt:

Für die Aequivalenz der Formen f_B und $f_B^{(1)}$ ist nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation A von f in sich selbst gebe, für welche die Congruenz stattfindet:

(B.) $$\lambda'+\alpha_1'\mu'-\alpha'(\lambda+\alpha_1'\mu) \equiv \pmod{\theta}.$$

Ist $\omega > 0$, so reducirt sich diese Congruenz auf

$$\lambda'-\alpha'\lambda+\alpha_1'\mu' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

2) Die Formen f_A und f_B der Invarianten $\Omega\theta$, Δ.

Nach Art. 2, 1) kommt die Form f_A nur in Betracht, wenn $\omega = 0$ ist; daher ist jetzt:

$$|a| = 0, \quad |a'| = 0, \quad |a''| = 1, \quad b \equiv b' \equiv b'' \equiv 0 \pmod{\theta^2}.$$

Angenommen, f_A und f_B seien äquivalent und f_A gehe durch die Substitution Ξ

in f_B über, so geht f in sich selbst über durch die Substitution

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha'}{\theta} & \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \theta\xi - \alpha'\eta & \eta & \theta\zeta \\ \xi' - \alpha'\frac{\eta'}{\theta} & \frac{\eta'}{\theta} & \zeta' \\ \xi'' - \alpha''\frac{\eta''}{\theta} & \frac{\eta''}{\theta} & \zeta'' \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung

$$a'\theta^2 = a\theta^2\eta^2 + a'\eta'^2 + a''\eta''^2 + 2b\eta'\eta'' + 2b'\theta\eta''\eta + 2b''\theta\eta\eta'$$

folgt aber

$$0 \equiv a'\eta'^2 + a''\eta''^2 \pmod{\theta^2}$$

und hieraus

$$\eta' \equiv \eta'' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Die Coefficienten von Λ sind also wieder ganze Zahlen.

Umgekehrt: Geht f durch Λ in sich selbst über, so geht f_A in f_B über durch

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha' & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta}(\lambda + \alpha'\mu) & \mu & \frac{\nu}{\theta} \\ \lambda' + \alpha'\mu' & \theta\mu' & \nu' \\ \lambda'' + \alpha'\mu'' & \theta\mu'' & \nu'' \end{pmatrix}.$$

Da $\frac{\nu}{\theta}$ ganz ist, gilt der Satz:

Für die Aequivalenz der Formen f_A und f_B ist nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation Λ von f in sich selbst gebe, für welche

(A.) $$\lambda + \alpha'\mu \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

In gewissem Sinne lässt sich dieser Fall als Specialfall des vorigen betrachten; denn (B.) geht in (A.) über, wenn man durch α' dividirt, dann

α' unendlich gross werden lässt und α_1' durch α' ersetzt. Die Form f_A ist also gewissermassen diejenige Form f_B, in welcher $\alpha' = \infty$ ist.

3) Die Formen f_C der Invarianten Ω, $\Delta\theta^2$.

Sind die Formen

$$f_C = \begin{pmatrix} a+2b'\alpha''+a''\alpha''^2, & a'+2b\beta''+a''\beta''^2 & a''\theta^2 \\ (a''\beta''+b)\theta, & (a''\alpha''+b')\theta, & a''\alpha''\beta''+b\alpha''+b'\beta''+b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix},$$

$$f_C^{(1)} = \begin{pmatrix} a+2b'\alpha_1''+a''\alpha_1''^2, & a'+2b\beta_1''+a''\beta_1''^2, & a''\theta^2 \\ (a''\beta_1''+b)\theta, & (a''\alpha_1''+b')\theta, & a''\alpha_1''\beta_1''+b\alpha_1''+b'\beta_1''+b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1, & m_1', & m_1'' \\ n_1, & n_1', & n_1'' \end{pmatrix}$$

äquivalent und geht f_C durch die Substitution Ξ in $f_C^{(1)}$ über, so geht f in sich selbst über durch eine Substitution Λ, deren Coefficienten

$$\lambda = \xi - \alpha_1'' \frac{\zeta}{\theta}, \quad \lambda' = \xi' - \alpha_1'' \frac{\zeta'}{\theta}, \quad \lambda'' = \alpha''\xi + \beta''\xi' + \theta\xi'' - \alpha_1''\left(\alpha'' \frac{\zeta}{\theta} + \beta'' \frac{\zeta'}{\theta} + \zeta''\right),$$

$$\mu = \eta - \beta_1'' \frac{\zeta}{\theta}, \quad \mu' = \eta' - \beta_1'' \frac{\zeta'}{\theta}, \quad \mu'' = \alpha''\eta + \beta''\eta' + \theta\eta'' - \beta_1''\left(\alpha'' \frac{\zeta}{\theta} + \beta'' \frac{\zeta'}{\theta} + \zeta''\right),$$

$$\nu = \frac{\zeta}{\theta}, \quad \nu' = \frac{\zeta'}{\theta}, \quad \nu'' = \alpha'' \frac{\zeta}{\theta} + \beta'' \frac{\zeta'}{\theta} + \zeta''$$

ganzzahlig werden, da $\zeta \equiv \zeta' \equiv 0 \pmod{\theta}$ ist. Um dieses zu beweisen, unterscheide ich zwei Fälle:

a) $\omega = 0$; also $|m''| = |m_1''| = \delta + 2$, $|n''^2 - mm'| = |n_1''^2 - m_1 m_1'| = 0$,

$$n \equiv n' \equiv n_1 \equiv n_1' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Aus den Transformationsgleichungen folgen die Congruenzen mod.θ:

$$(1.) \quad m_1 \equiv m\xi^2 + m'\xi'^2 + 2n''\xi\xi',$$

$$(2.) \quad m_1' \equiv m\eta^2 + m'\eta'^2 + 2n''\eta\eta',$$

$$(3.) \quad 0 \equiv m\eta\zeta + m'\eta'\zeta' + n''(\eta\zeta' + \zeta\eta'),$$

$$(4.) \quad 0 \equiv m\zeta\xi + m'\zeta'\xi' + n''(\zeta\xi' + \xi\zeta'),$$

$$(5.) \quad n_1'' \equiv m\xi\eta + m'\xi'\eta' + n''(\xi\eta' + \eta\xi').$$

Bildet man $(5.)^2 - (1.)(2.)$, $(4.)\eta' - (3.)\xi'$, $(3.)\xi - (4.)\eta$, so kommt

$$n_1''^2 - m_1 m_1' \equiv (n''^2 - mm')(\xi\eta' - \eta\xi')^2 \pmod{\theta},$$

$$(m\zeta + n''\zeta')(\xi\eta' - \eta\xi') \equiv 0, \quad (n''\zeta + m'\zeta')(\xi\eta' - \eta\xi') \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

Aus der ersten Congruenz folgt $|\xi\eta' - \eta\xi'| = 0$ und sodann aus den beiden letzten

$$m\zeta + n''\zeta' \equiv 0, \quad n''\zeta + m'\zeta' \equiv 0$$

und hieraus

$$\zeta \equiv \zeta' \equiv 0 \pmod{\theta}.$$

b) $\omega > 0$; also $|m| = |m_1| = 0$, $|m'| = |m_1'| = \omega$, $|m''| = |m_1''| = \omega+\delta+2$,

$$n \equiv n' \equiv n_1 \equiv n_1' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta+1}}, \quad n'' \equiv n_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}.$$

Man erhält die Congruenzen

$$m_1 \equiv m\xi^2 \pmod{\theta}, \quad 0 \equiv m\zeta^2+m'\zeta'^2+2n''\zeta\zeta' \pmod{\theta^{\omega+1}}, \quad 0 \equiv \xi\zeta \pmod{\theta^{\omega}},$$

woraus folgt

$$|\xi| = 0, \quad \zeta \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}, \quad \zeta' \equiv 0 \pmod{\theta}, \text{ w. z. b. w.}$$

Sollen also f_C und $f_C^{(1)}$ äquivalent sein, so muss f_C in $f_C^{(1)}$ übergehen durch eine ganzzahlige Substitution der Form

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha''}{\theta} & -\frac{\beta''}{\theta} & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1'' & \beta_1'' & \theta \end{pmatrix},$$

wo

$$\xi = \lambda + \alpha_1''\nu, \quad \xi' = \lambda' + \alpha_1''\nu', \quad \theta\xi'' = -\alpha''\lambda - \beta''\lambda' + \lambda'' + \alpha_1''(-\alpha''\nu - \beta''\nu' + \nu''),$$

$$\eta = \mu + \beta_1''\nu, \quad \eta' = \mu' + \beta_1''\nu', \quad \theta\eta'' = -\alpha''\mu - \beta''\mu' + \mu'' + \beta_1''(-\alpha''\nu - \beta''\nu' + \nu''),$$

$$\zeta = \theta\nu, \quad \zeta' = \theta\nu', \quad \zeta'' = -\alpha''\nu - \beta''\nu' + \nu''.$$

Hieraus folgt:

Für die Aequivalenz der Formen f_C und $f_C^{(1)}$ ist nothwendig und hinreichend, dass es eine Transformation A von f in sich selbst gebe, für welche

$$\text{(C.)} \quad \begin{cases} \alpha''\lambda + \beta''\lambda' - \lambda'' + \alpha_1''(\alpha''\nu + \beta''\nu' - \nu'') \equiv 0, \\ \alpha''\mu + \beta''\mu' - \mu'' + \beta_1''(\alpha''\nu + \beta''\nu' - \nu'') \equiv 0 \end{cases} \pmod{\theta}.$$

Die noch übrig bleibenden Fälle lassen sich in ähnlicher Weise behandeln. Der Kürze wegen unterdrücke ich die Discussion derselben und stelle nur die Resultate zusammen:

Als nothwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz zweier Formen f_1 der Invarianten Ω, $A\theta^2$, ergiebt sich jedesmal, dass es eine automorphe Substitution A von f geben muss, deren Coefficienten zwei Congruenzen (mod. θ) genügen, und zwar für die Formen

f_B und f_C den Congruenzen: $\text{(C'.)} \begin{cases} \alpha'\lambda - \lambda' + \alpha''(\alpha'\nu - \nu') \equiv 0, \\ \alpha'\mu - \mu' + \beta''(\alpha'\nu - \nu') \equiv 0, \end{cases}$

f_B - $f_B^{(1)}$ - - (B'.) $\alpha'\lambda - \lambda' + \alpha_1'(\alpha'\mu - \mu') \equiv 0, \quad \alpha'\nu - \nu' \equiv 0,$

f_A - f_B - - (A'.) $\lambda + \alpha'\mu \equiv 0, \quad \nu \equiv 0,$

f_A - f_C - - (A''.) $\lambda + \alpha''\nu \equiv 0, \quad \mu + \beta''\nu \equiv 0.$

Diese Congruenzen lassen sich indessen auch als Specialfälle von (C.) auffassen, indem man wieder f_A als eine Form f_B betrachtet, in welcher $\alpha' = \infty$ ist, und f_B als eine Form f_C, in welcher $\alpha'' = -\alpha'\beta''$, aber $\beta'' = \infty$ ist.

§ 2.

Die Transformationen einer ternären Form in sich selbst.

5. Aus dem Vorigen ergiebt sich für die Entscheidung der Aequivalenz zweier Formen f_1 das Bedürfniss einer genaueren Untersuchung der automorphen Transformation A der Form $f = \binom{a,\ a',\ a''}{b,\ b',\ b''}$. Die Coefficienten $\lambda, \mu, \ldots$ der Substitution A sind von Herrn *Bachmann* durch folgende Gleichungen gegeben worden*):

$$\text{(I.)}\quad \left\{\begin{array}{rcl}
\varepsilon\lambda &=& 2p^2-\varepsilon+2b'pq' -2b''pq''-\Omega q \frac{\partial F}{\partial q},\\
\varepsilon\mu &=& 2bpq' -2a'pq'' -\Omega q' \frac{\partial F}{\partial q},\\
\varepsilon\nu &=& 2a''pq' -2bpq'' -\Omega q'' \frac{\partial F}{\partial q},\\
\varepsilon\lambda' &=& 2apq'' -2b'pq -\Omega q \frac{\partial F}{\partial q'},\\
\varepsilon\mu' &=& 2p^2-\varepsilon+2b''pq''-2bpq -\Omega q' \frac{\partial F}{\partial q'},\\
\varepsilon\nu' &=& 2b'pq''-2a''pq-\Omega q'' \frac{\partial F}{\partial q'},\\
\varepsilon\lambda'' &=& 2b''pq -2apq' -\Omega q \frac{\partial F}{\partial q''},\\
\varepsilon\mu'' &=& 2a'pq -2b''pq'-\Omega q' \frac{\partial F}{\partial q''},\\
\varepsilon\nu'' &=& 2p^2-\varepsilon+2bpq -2b'pq' -\Omega q'' \frac{\partial F}{\partial q''},
\end{array}\right.$$

wo zur Abkürzung

$$\text{(II.)}\qquad p^2-\Omega F(q,\ q',\ q'') = \varepsilon$$

gesetzt ist, und wo $p,\ q,\ q',\ q''$ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten, welche so gewählt sein müssen, dass die neun Substitutionscoefficienten $\lambda, \mu, \ldots$ ganzzahlig werden. Hierzu ist, wie Herr *Bachmann* bewiesen hat, nothwendig, dass ε in $4\Omega^2 A$ aufgehe, also, da ΩA un-

*) Dieses Journal, Bd. 71, p. 297.

gerade vorausgesetzt ist, von der Form sei $\varepsilon = \sigma\varepsilon'$, wo $\sigma = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ und ε' ein Theiler von $\Omega^2\Delta$, und dass ferner ε' auch in p^2 aufgehe.

Bei der weiteren Behandlung des Gegenstandes hat sich Herr ***Bachmann*** auf den Fall beschränkt, dass die Determinante $\Omega^2\Delta$ ungerade ist und keinen quadratischen Theiler besitzt. Die folgenden Untersuchungen erfordern aber eine genauere Beantwortung der Frage, in welcher Potenz die Primfactoren von $\Omega\Delta$ in ε, p, q, q', q'' auftreten können, wenn Ω, Δ beliebige ungerade Zahlen bedeuten.

6. Es sei θ ein Primfactor von $\Omega\Delta$ und $|\Omega|_\theta = \omega$, $|\Delta|_\theta = \delta$, $|\varepsilon|_\theta = \eta$.

Ist $\eta = 0$, $\omega > 0$, so erfordert die Gleichung (II.), dass ε $R\theta$ sei.

Ist $\eta > 0$, so muss, weil ε' in $\Omega^2\Delta$ aufgehen soll, $1 \leqq \eta \gtrless 2\omega+\delta$ sein. Um die Discussion zu vereinfachen, setze ich wieder voraus, die Form f sei bereits so transformirt, dass

$$|a| = 0, \quad |a'| = \omega, \quad |a''| = \omega+\delta, \quad b \equiv b' \equiv b'' \equiv 0 \pmod{\theta^{2\omega+\delta+1}};$$

also

$$|A| = \omega+\delta, \quad |A'| = \delta, \quad |A''| = 0, \quad B \equiv B' \equiv B'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta+1}}$$

und, wenn $a' = a'_0\theta^\omega$, $a'' = a''_0\theta^{\omega+\delta}$ gesetzt wird:

$$f \equiv ax^2 + a'_0\theta^\omega x'^2 + a''_0\theta^{\omega+\delta}x''^2 \pmod{\theta^{2\omega+\delta+1}}.$$

Da ε' in p^2 aufgehen soll, muss

$$\text{(p.)} \qquad p^2 \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$$

sein, und aus den Gleichungen (I.) ergeben sich folgende Bedingungen*):

$(\mu.)$	$pq'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega}}$,	$(\lambda'.)$	$pq''+a''qq' \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$,
$(\nu.)$	$pq' \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega-\delta}}$,	$(\nu'.)$	$-pq+aq'q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega-\delta}}$,
$(\mu'.)$	$q'^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega-\delta}}$,	$(\lambda''.)$	$-pq'+a'qq'' \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$,
$(\nu''.)$	$q''^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega}}$,	$(\mu''.)$	$pq+aq'q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega}}$.

Von diesen Congruenzen folgt $(\mu.)$ aus (p.) und $(\nu''.)$, $(\nu.)$ aus (p.) und $(\mu'.)$, $(\nu'.)$ aus $(\mu'.)$, $(\mu''.)$, $(\nu''.)$, so dass nur die folgenden sechs zu berücksichtigen bleiben:

(p.)	$p^2 \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$,	$(\mu''.)$	$pq+aq'q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega}}$,
$(\mu'.)$	$q'^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega-\delta}}$,	$(\lambda''.)$	$-pq'+a'q''q \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$,
$(\nu''.)$	$q''^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega}}$,	$(\lambda'.)$	$pq''+a''qq' \equiv 0 \pmod{\theta^\eta}$,

*) Die Congruenzen, für welche der Exponent des Moduls Null oder negativ würde, fallen weg.

zu denen nach (II.) hinzukommt:

$$(\varepsilon.)\quad p^2+a_0'a_0''\theta^{2\omega+\delta}q^2+a_0''a\theta^{\omega+\delta}q'^2+aa_0'\theta^{\omega}q''^2 \equiv \varepsilon \pmod{\theta^{2\omega+\delta+1}}.$$

7. Ich discutire (für $\eta > 0$) folgende Fälle ausführlicher:

1) $\omega = 0,\ \delta > 0.$

Hier kann nur $\eta = \delta$ sein; denn wäre $\eta < \delta$, so würde, wenn η *ungerade*, $p^2 \equiv q''^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta+1}}$, $\varepsilon \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta+1}}$, gegen die Voraussetzung. Wenn η *gerade*, wäre zunächst $p \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}$. Für $p = \theta^{\frac{1}{2}\eta}p_1$, $q'' = \theta^{\frac{1}{2}\eta}q_1''$ erhielte man aus $(\mu''.)$, $(\lambda''.)$, $(\varepsilon.)$:

$$p_1q+aq_1''q' \equiv 0,\quad a'q_1''q-p_1q' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}};\quad p_1^2+aa'q_1''^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta}.$$

Aus den beiden ersten Congruenzen würde folgen

$$(p_1^2+aa'q_1''^2)q \equiv 0,\quad (p_1^2+aa'q_1''^2)q' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die dritte:

$$q \equiv q' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}},$$

gegen die Voraussetzung, dass p, q, q', q'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Für $\eta = \delta \equiv 0 \pmod 2$ ist nach $(p.)$ und $(\nu''.)$ zu setzen: $p = \theta^{\frac{1}{2}\delta}p_1$, $q'' = \theta^{\frac{1}{2}\delta}q_1''$, worauf die Congruenzen bleiben:

$$p_1q+aq_1''q' \equiv 0,\quad a'q_1''q-p_1q' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\delta}},$$
$$p_1^2+a'a_0''q^2+a_0''aq'^2+aa'q_1''^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta}.$$

Aus den beiden ersten folgt:

$$\left.\begin{aligned}(p_1^2+aa'q_1''^2)q \equiv 0,\quad (p_1^2+aa'q_1''^2)q' \equiv 0,\\ (a'q^2+aq'^2)p_1 \equiv 0,\quad (a'q^2+aq'^2)q_1'' \equiv 0\end{aligned}\right\} \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\delta}}.$$

Da p und q'' durch θ theilbar sind, können es q und q' nicht zugleich sein, woraus folgt

$$p_1^2+aa'q_1''^2 \equiv 0,\quad a_0''(a'q^2+aq'^2) \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta}.$$

Es kann also $a'q^2+aq'^2$ nicht durch θ theilbar sein. Daher muss sein

$$p_1 \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\delta}}$$

und

$$p \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\delta}}.$$

Für $\eta = \delta \equiv 1 \pmod 2$ ist nach $(p.)$ und $(\nu''.)$ zu setzen $p = \theta^{\frac{1}{2}(\delta+1)}p_1$, $q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\delta+1)}q_1''$, so dass die Congruenzen bleiben

$$p_1q+aq'q_1'' \equiv 0,\ -p_1q'+a'qq_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}};\ a_0''(a'q^2+aq'^2) \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta},$$

woraus, weil ε_o durch θ nicht theilbar ist, folgt:

$$p_1 \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}}$$

und

$$p \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\delta}},$$

wie im vorigen Falle. In beiden Fällen kann ε_o quadratischer Rest oder Nichtrest von θ sein.

2) $\omega > 0,\ \delta = 0.$

Hier kann η nicht *ungerade* sein, ausgenommen für $\eta = \omega$. Denn für $\eta < \omega$ wäre $(\varepsilon.)$ unmöglich und für $\eta > \omega$ würde man bei *geradem* ω erhalten:

$$p^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta+1}},\quad q'^2 \equiv q''^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta-\omega+1}},\quad \varepsilon \equiv 0 \pmod{\theta^{\eta+1}},$$

gegen die Voraussetzung. Bei *ungeradem* ω wäre zunächst nach $(\mathfrak{p}.)$, $(\mu'.)$, $(\nu''.)$ zu setzen

$$p = \theta^{\frac{1}{2}(\eta+1)} p_1,\quad q' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1',\quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1'',$$

worauf aus $(\lambda''.)$, $(\lambda'.)$, $(\varepsilon.)$ folgen würde

$$\left.\begin{aligned} -p_1 q_1' + a_o' \theta^{\omega-\frac{1}{2}(\eta+1)} q q_1'' &\equiv 0, \\ p' q_1'' + a_o'' \theta^{\omega-\frac{1}{2}(\eta+1)} q q_1' &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}};\quad a(a_o'' q_1'^2 + a_o' q_1''^2) \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}.$$

Da also q_1' und q_1'' nicht beide durch θ theilbar sein können, würde weiter folgen

$$p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega-\frac{1}{2}(\eta+1)}}.$$

Setzt man demgemäss $p_1 = \theta^{\omega-\frac{1}{2}(\eta+1)} p_2$, so käme

$$-q_1' p_2 + a_o' q_1'' q \equiv 0,\quad q_1'' p_2 + a_o'' q_1' q \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)}}$$

und hieraus

$$(a_o'' q_1'^2 + a_o' q_1''^2) q \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)}},$$

daher $q \equiv 0 \pmod{\theta}$, gegen die Voraussetzung, dass $p,\ q,\ q',\ q''$ keinen Theiler gemein haben.

Für $\eta = \omega \equiv 1 \pmod 2$ hingegen ist zunächst zu setzen $p = \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} p_1$, wodurch man die Congruenzen erhält:

$$p_1 q' \equiv p_1 q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}},\quad a(a_o'' q'^2 + a_o' q''^2) \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}.$$

Da also q' und q'' nicht zugleich durch θ theilbar sein dürfen, muss sein

$$p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}} \quad \text{und} \quad p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}.$$

Dann bleibt nur noch der Congruenz $(\varepsilon.)$ zu genügen, was immer möglich ist, welches auch der quadratische Charakter von $\varepsilon_o \pmod{\theta}$ sei.

Die Fälle, in denen η *gerade* ist, ergeben keinen Widerspruch:

Ist $\eta < \omega$ und wird nach (p.) gesetzt $p = \theta^{\frac{1}{2}\eta} p_1$, so folgt $p_1^2 \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}$; daher $|p| = \frac{1}{2}\eta$, $\varepsilon_o R\theta$ und nach $(\lambda''.)$, $(\lambda'.)$:

$$q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}.$$

Ist $\eta \geqq \omega$ und ω *gerade*, so hat man zu setzen

$$p = \theta^{\frac{1}{2}\eta} p_1, \quad q' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1', \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1''$$

und es bleiben die Congruenzen

$$(\mathrm{p}_1.) \qquad -p_1 q_1' + a_o' \theta^{\omega - \frac{1}{2}\eta} q q_1'' \equiv 0, \quad p_1 q_1'' + a_o'' \theta^{\omega - \frac{1}{2}\eta} q q_1' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}},$$

$$(\varepsilon_o.) \qquad p_1^2 + a_o' a_o'' \theta^{2\omega-\eta} q^2 + a a_o'' q_1'^2 + a a_o' q_1''^2 \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta^{2\omega-\eta+1}}.$$

Für $\eta = \omega$ folgt aus $(\mathrm{p}_1.)$ mit Rücksicht auf $(\varepsilon_o.)$ entweder:

$$p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}}, \quad p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}$$

oder:

$$q_1' \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}}, \quad |p| = \tfrac{1}{2}\omega, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}, \quad \varepsilon_o R\theta.$$

Für $\eta > \omega$ folgt aus $(\mathrm{p}_1.)$:

$$(a_o'' q_1'^2 + a_o' q_1''^2) p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}}, \quad (a_o'' q_1'^2 + a_o' q_1''^2) q \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)}}$$

und, da q nicht durch θ theilbar sein darf, mit Rücksicht auf $(\varepsilon_o.)$:

$$a_o'' q_1'^2 + a_o' q_1''^2 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}}, \quad |p_1| = 0$$

und endlich aus $(p_1.)$ und $(\varepsilon_o.)$: $q_1' \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\omega}}$, so dass also

$$q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \quad |p| = \tfrac{1}{2}\eta \quad \text{und (solange } \eta < 2\omega) \quad \varepsilon_o R\theta.$$

Ist $\eta > \omega$ und ω *ungerade*, so ist zu setzen

$$p = \theta^{\frac{1}{2}\eta} p_1, \quad q_1 = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega+1)} q_1', \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega+1)} q_1''$$

und es bleiben die Congruenzen $(\lambda''.)$, $(\lambda'.)$, $(\varepsilon_o.)$, welche erfordern, dass

$$\left.\begin{aligned} -p_1 q_1' + a_o' \theta^{\omega - \frac{1}{2}\eta} q q_1'' &\equiv 0, \\ p_1 q_1'' + a_o'' \theta^{\omega - \frac{1}{2}\eta} q q_1' &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}}, \quad p_1^2 + a_o' a_o'' \theta^{2\omega-\eta} q^2 \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}.$$

Für $\eta < 2\omega$ folgt hieraus $|p_1| = 0$, $q_1' \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}}$; also

$$|p| = \tfrac{1}{2}\eta, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \quad \varepsilon_o R\theta.$$

Für $\eta = 2\omega$ folgt $p_1^2 + a_o' a_o'' q^2 \equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}$, $q_1' \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}}$; daher

$$p \equiv q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}, \quad |q| = 0.$$

Der quadratische Charakter von $\varepsilon_o \pmod{\theta}$ bleibt beliebig, ausgenommen, wenn $\theta = 3$, $a_o' a_o'' \equiv 2 \pmod{3}$, in welchem Falle $\varepsilon_o N3$ sein muss.

3) $\omega \equiv \delta \equiv 1 \pmod 2$.

Es sind hier folgende Fälle getrennt zu behandeln:

$\alpha)$ $0 < \eta \leqq \omega$.

Ist $\eta < \omega$, so kann es nach $(\varepsilon.)$ nur gerade sein und

$$|p| = \tfrac{1}{2}\eta, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \quad \varepsilon_0 R\theta.$$

Ist $\eta = \omega$, so muss $p \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)}}$ sein, und da für $p = \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} p_1$ folgt

$$a a_0' q''^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod\theta, \quad p_1 q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}},$$

ergiebt sich

$$p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}, \quad |q''| = 0, \quad a a_0' \varepsilon_0 R\theta.$$

$\beta)$ $\omega < \eta \leqq \omega + \delta$.

Ist η ***ungerade***, also $\eta < \omega + \delta$, so ist zu setzen $p = \theta^{\frac{1}{2}(\eta+1)} p_1$, $q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1''$, wodurch die Congruenzen sich reduciren auf

$$\begin{aligned}
\theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} p_1 q + a q' q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)}}, \\
-p_1 q' + a_0' \theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)} q q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-1)}}; \quad a a_0' q_1''^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod\theta, \\
p_1 q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}};
\end{aligned}$$

daher müsste sein $|q_1''| = 0$, $p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}}$, $q' \equiv 0 \pmod\theta$, und die zweite Congruenz gäbe $q \equiv 0 \pmod\theta$ gegen die Voraussetzung über p, q, q', q''. Also kann η nur *gerade* sein und es ist zu setzen:

$$p = \theta^{\frac{1}{2}\eta} p_1, \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega+1)} q_1'',$$

wodurch man die Congruenzen erhält:

$$\begin{aligned}
\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)} p_1 q + a q' q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}}, \\
-p_1 q' + a_0' \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} q q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \\
p_1 q_1'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}}, \\
p_1^2 + a a_0'' \theta^{\omega+\delta-\eta} q'^2 &\equiv \varepsilon_0 \pmod\theta.
\end{aligned}$$

Ist $\eta < \omega + \delta$, so muss demnach gesetzt werden:

$$|p_1| = 0, \quad |q| = 0, \quad q' = \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} q_1', \quad q_1'' = \theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)} q_2''.$$

Hierdurch reducirt sich aber, wenn $\eta > 2\omega$, die erste Congruenz auf

$$p_1 q + a \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} q_1' q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta - \omega}},$$

was unmöglich ist. Daher muss $\eta \leqq 2\omega$ sein. Dann fällt diese Congruenz weg und die zweite giebt $q_1' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}}$. Man erhält also die Bedingungen

$$|p| = \tfrac{1}{2}\eta, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \quad \varepsilon_0 R\theta.$$

Ist $\eta = \omega+\delta$, so erhält man neben der vorigen Auflösung noch eine andere aus der Annahme $|q'| = 0$, aus welcher folgt $p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)}}$. Für $p_1 = \theta^{\frac{1}{2}(\omega+1)} p_2$ bleiben dann noch die Congruenzen

$$\theta^{\omega} p_2 q + a q' q_1'' \equiv 0, \quad -p_2 q' + a_0' q q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}},$$

aus denen folgt

$$p_2 \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}},$$

und hieraus folgen die Bedingungen:

$$p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}, \quad |q'| = 0, \quad q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\delta}}, \quad a a_0'' \varepsilon_0 R\theta.$$

$\gamma)$ $\omega+\delta < \eta \leqq 2\omega+\delta$.

Ist η ***ungerade***, so ist zu setzen

$$p = \theta^{\frac{1}{2}(\eta+1)} p_1, \quad q' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-\delta+1)} q_1', \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega)} q_1'', \quad |q| = 0,$$

wodurch man die Congruenzen erhält:

$$(q.) \qquad \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-\eta)} p_1 q + a q_1' q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}},$$

$$(q'.) \qquad -\theta p_1 q_1' + a_0' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-\eta)} q q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega+\delta)}},$$

$$(q''.) \qquad p_1 q_1'' + a_0'' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-\eta)} q q_1' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}},$$

$$(\varepsilon_0.) \qquad a_0' a_0'' \theta^{2\omega+\delta-\eta} q^2 + a a_0' q_1''^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta}.$$

Ist $\eta < 2\omega+\delta$, also $\omega > 2$, so widersprechen sich die Congruenzen $(q'.)$, $(q''.)$, $(\varepsilon_0.)$; daher muss $\eta = 2\omega+\delta$ sein. Dann folgt aus $(q'.)$ und $(q''.)$ zunächst

$$q_1' \equiv q_1'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}},$$

und wenn man

$$q_1' = \theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)} q_2', \quad q_1'' = \theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)} q_2''$$

setzt, so bleiben noch die Congruenzen:

$$q p_1 + a \theta^{\omega-1} q_2' q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}},$$

$$-\theta q_2' p_1 + a_0' q q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta+1)}},$$

$$a_0'(a_0'' q^2 + a\theta^{\omega-1} q_2''^2) \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta}.$$

Aus den beiden ersten folgt

$$p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}}, \quad q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta+1)}};$$

somit ist

$$a_0' a_0'' q^2 \equiv \varepsilon_0 \pmod{\theta},$$

und man erhält die Bedingungen:

$$p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}, \quad q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}, \quad a_0' a_0'' \varepsilon_0 R\theta.$$

Ist η *gerade,* also $\omega+\delta+2 \leqq \eta \geqq 2\omega+\delta-1$, $\omega > 2$, so ist zu setzen:

$$p = \theta^{\frac{1}{2}\eta} p_1, \quad |q| = 0, \quad q' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-\delta)} q_1', \quad q'' = \theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega+1)} q_1'',$$

wodurch man zunächst die Congruenzen erhält:

$$\begin{aligned}
&(\text{q.}) && \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-1-\eta)} p_1 q + a q_1' q_1'' &&\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\delta-1)}},\\
&(\text{q}'.) && -p_1 q_1' + a_o' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta+1-\eta)} q q_1'' &&\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega+\delta)}},\\
&(\text{q}''.) && p_1 q_1'' + a_o'' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-1-\eta)} q q_1' &&\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\omega-1)}},\\
&(\varepsilon_o.) && p_1^2 + a a_o'' q_1'^2 &&\equiv \varepsilon_o \pmod{\theta}.
\end{aligned}$$

Wollte man $|q_1'| = 0$ setzen, so müsste nach (q'.) $p_1 \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta+1-\eta)}}$ sein, was mit (q''.) im Widerspruche steht. Daher muss $|p_1| = 0$ sein, und man hat zu setzen:

$$q_1' = \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta+1-\eta)} q_2', \quad q_1'' = \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-1-\eta)} q_2''.$$

Dann erhielte man, wenn $\eta > 2\omega$, aus (q.):

$$p_1 q + a\theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta+1-\eta)}, \quad q_2' q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta-\omega}},$$

was unmöglich ist. Daher muss $\eta \leqq 2\omega$ sein. Dann fällt (q.) weg und es bleiben die Congruenzen

$$\begin{aligned}
-p_1 q_2' + a_o' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta-1-\eta)} q q_2'' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}},\\
p_1 q_2'' + a_o'' \theta^{\frac{1}{2}(2\omega+\delta+1-\eta)} q q_2' &\equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-\delta)}},\\
p_1^2 &\equiv \varepsilon_o \pmod{\theta},
\end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$q_2'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-\delta)}}, \quad q_2' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}(\eta-\omega-1)}},$$

so dass man schliesslich die Bedingungen erhält:

$$|p| = \tfrac{1}{2}\eta, \quad |q| = 0, \quad q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}, \quad \varepsilon_o R\theta.$$

Es ergiebt sich also, dass η für ungerade ω, δ einer geraden Zahl zwischen Null und 2ω (inclus.) oder einer der Zahlen ω, $\omega+\delta$, $2\omega+\delta$ gleich sein muss. Genau dasselbe Resultat findet man aber auch, wenn ω, δ nicht beide ungerade sind. Um Raum zu sparen, unterdrücke ich die übrigens analoge Discussion dieser Fälle und beschränke mich darauf, die Resultate (für $\eta > 0$) hier noch einmal übersichtlich zusammenzustellen:

$\omega = 0$, $\delta > 0$; Bedingung: $\eta = \delta$, $p \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\delta}}$;

$\omega > 0$, $\delta = 0$; Bedingungen:

a) η gerade, $0 < \eta < 2\omega$, $|p| = \frac{1}{2}\eta$, $|q| = 0$, $q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}$, $\varepsilon_o R\theta$;

b) $\eta = \omega$, $p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega}}$;

c) $\eta = 2\omega$, $p \equiv q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}$, $|q| = 0$ [und wenn $\theta = 3$, $a_0' a_0'' \equiv 2 \pmod 3$, ausserdem: $\varepsilon_0 N3$].

$\omega > 0$, $\delta > 0$; Bedingungen:

a) η gerade, $0 < \eta \leqq 2\omega$, $|p| = \frac{1}{2}\eta$, $|q| = 0$, $q' \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\frac{1}{2}\eta}}$, $\varepsilon_0 R\theta$;

b) $\eta = \omega$, $p \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}$, $|q''| = 0$, $aa_0'\varepsilon_0 R\theta$;

c) $\eta = \omega + \delta$, $p \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}$, $|q'| = 0$, $q'' \equiv 0 \pmod{\theta^\delta}$, $aa_0''\varepsilon_0 R\theta$;

d) $\eta = 2\omega + \delta$, $p \equiv q'' \equiv 0 \pmod{\theta^{\omega+\delta}}$, $|q| = 0$, $q' \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}$, $a_0' a_0''\varepsilon_0 R\theta$.

Bemerkung. Genügt ein Werth für η zwei Bedingungen dieser Tafel, so sind beide Annahmen zulässig. Wenn z. B. ω gerade und > 0, $\delta > 0$ ist, genügt der Werth $\eta = \omega$ den Bedingungen a) und b) zugleich, und es kann daher sowohl $|p| = \frac{1}{2}\omega$ als $p \equiv 0 \pmod{\theta^\omega}$ gesetzt werden. Ob die Gleichung $p^2 - \Omega F(q, q', q'') = \varepsilon$ unter den aufgestellten Bedingungen (für sämmtliche Primfactoren θ von $\Omega\Delta$) immer auflösbar sei, muss vorläufig dahingestellt bleiben.

Was den Factor σ anbetrifft, so kann derselbe offenbar beliebig $= \pm 1$ oder ± 2 genommen werden, für $\sigma = \pm 4$ jedoch müssen, wenn die Form f so transformirt vorausgesetzt wird, dass a, a', a'' ungerade, b, b', b'' gerade sind, p, q, q', q'' sämmtlich ungerade sein, und für die Auflösbarkeit der Gleichung (II.) unter dieser Bedingung ist dann nothwendig, dass ΩA, $\Omega A'$, $\Omega A''$ sämmtlich von der Form $4n+3$ sind (*Bachmann* a. a. O.). Mit diesen zusammen reichen dann die Bedingungen der obigen Tafel auch hin, die Substitutionscoefficienten ganzzahlig zu machen.

Zürich, November 1893.

Zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung mit unbestimmten Coefficienten.

(Von Herrn *G. Bohlmann.*)

Die in neuerer Zeit vielfach behandelte Differentialgleichung:

$$(4'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0(x)+\eta_1(x).y+\eta_2(x).y^2+\eta_3(x).y^3$$

zeigt bekanntlich ein Verhalten, durch welches sie sich von den ihr analogen, einfacheren Differentialgleichungen:

$$(1'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0(x),$$

$$(2'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0(x)+\eta_1(x).y,$$

$$(3'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0(x)+\eta_1(x).y+\eta_2(x).y^2,$$

erheblich unterscheidet. Einmal ist sie nicht eine „Transformirte“ der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung in dem Sinne, in welchem *Vessiot* jenen Begriff aufgestellt hat*), sodann gehört sie auch nicht zu der von *Fuchs***) charakterisirten Klasse von Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten. Daher scheinen weder die Theorie noch die Methoden, welche *Fuchs* für die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung geschaffen hat, auf sie ohne erhebliche Modificationen anwendbar zu sein. Neben diesen beiden Punkten ist aber noch ein drittes Moment von grosser Wichtigkeit, welches die Typen (1'.), (2'.), (3'.) nicht nur von der Gleichung (4'.), sondern überhaupt von allen anderen Differentialgleichungen erster Ordnung

*) *Vessiot,* Sur l'intégration des équations différentielles linéaires, Annales de l'École Normale Supérieure 1892. — Die Arbeit ist auch separat erschienen als „I^{ière} Thèse“ Paris, Gauthiers-Villars 1892.

**) *Fuchs,* über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 26. Juni 1884.

scheidet, welche von den genannten drei wesentlich verschieden sind. Dieses betrifft die Integration einer Differentialgleichung für Coefficienten η, welche unbestimmte Functionen von x sind, und zwar handelt es sich, kurz gesagt, darum, ob eine solche Integration überhaupt immer möglich ist. Die Beantwortung dieser Frage macht den Inhalt unserer Arbeit aus. Sie gelangt zu dem Resultate, dass es im wesentlichen nur die Fälle (1'.), (2'.), (3'.) sind, bei welchen eine solche Integration für unbestimmte Coefficienten geleistet werden kann. Ehe wir jedoch das Problem in Angriff nehmen können, müssen wir es vor allen Dingen erst präcis fassen.

1.

Genaue Formulirung des Problems.

Wir gehen zunächst von bekannten Fällen, nämlich von den Gleichungen (1'.), (2'.), (3'.) aus. Von ihnen weiss man ja längst, dass ihre Integralgleichungen die Form haben:

$$(1.) \qquad y + u_0(x) = \text{Const.},$$

$$(2.) \qquad u_1(x).y + u_0(x) = \text{Const.},$$

$$(3.) \qquad \frac{u_1(x).y + u_0(x)}{u_3(x).y + u_2(x)} = \text{Const.},$$

wobei (r) die Integralgleichung von (r') ist $(r = 1, 2, 3)$. Für eine bestimmte Wahl der Functionen η der Differentialgleichung (r') werden die u der Integralgleichung gewisse Functionen von x. Aendert man die Functionen η in der Differentialgleichung (r'), so ändern sich auch die Functionen u in der zugehörigen Integralgleichung (r), dagegen bleibt die linke Seite derselben in ihrer Abhängigkeit von y ungeändert. Wie also die rechte Seite der Differentialgleichung (r') als Function von y vollkommen bestimmt ist, so ist auch die linke Seite der zugehörigen Integralgleichung (r) eine wohl bestimmte Function der Variabeln y, und wie die Coefficienten η der Differentialgleichung (r') unbestimmte Functionen von x sind, so sind auch die Coefficienten u der zugehörigen Integralgleichung (r) unbestimmte Functionen von x. Sind die η irgend ***vorgeschriebene*** Functionen von x, so bestimmen sich praeter propter die u*) und umgekehrt, sind die u der Integralgleichung (r) irgend vorgeschriebene Functionen von x, so

*) Nämlich abgesehen von unwesentlichen Constanten. In (3.) bestimmen sich der Natur der Sache nach nur die Verhältnisse der u.

bestimmen sich aus ihnen die η der zugehörigen Differentialgleichung (r'). Die η und u sind nämlich durch folgendes Gleichungssystem (r^a) verbunden $(r = 1, 2, 3)$:

$$(1^a.) \qquad \eta_0 = -u_0',$$

$$(2^a.) \qquad \eta_0 = -\frac{u_0'}{u_1}, \quad \eta_1 = -\frac{u_1'}{u_1},$$

$$(3^a.) \qquad \begin{cases} \eta_2 = -\dfrac{u_1'u_3 - u_1u_3'}{u_1u_2 - u_0u_3}, & \eta_0 = -\dfrac{u_0'u_2 - u_0u_2'}{u_1u_2 - u_0u_3}, \\ \eta_1 = -\dfrac{(u_0'u_3 - u_0u_3') + (u_1'u_2 - u_1u_2')}{u_1u_2 - u_0u_3}. \end{cases}$$

Dasselbe ergiebt sich einfach durch Differentiation der Integralgleichung (r) und Vergleichung des so für $\frac{dy}{dx}$ erhaltenen Ausdrucks mit der rechten Seite der vorgeschriebenen Differentialgleichung (r'). Das System (r^a) ist ein gewöhnliches Gleichungssystem für die η, ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die u, und seine Form bürgt dafür*), dass — wie auch die u als Functionen von x gewählt sein mögen — sich ein System zugehöriger Functionen η ergiebt und — wie auch die η gewählt sein mögen — ein System zugehöriger Functionen u. Die Integralgleichung (r) umfasst daher unter den zu ihr gehörigen Differentialgleichungen (r') jede beliebige der Form (r'), aber auch nur solche dieser Form. Wir sehen also, dass die Fälle (1'.), (2'.), (3'.) folgende Eigenschaft haben:

„Sieht man die rechte Seite der vorgelegten Differentialgleichung (r') als eine bestimmte Function von y an, deren Coefficienten η irgend welche unbestimmte Functionen von x sind, so ist die zugehörige Integralgleichung eine bestimmte, angebbare Function von y, deren Coefficienten u aber unbestimmte Functionen von x sind, die sich aus den η berechnen lassen. Dabei ist es immer möglich, die unbestimmten Functionen u (bezw. η) so zu wählen, dass die η (bezw. u) irgend vorgeschriebene Functionen von x werden."

Es empfiehlt sich, der Kürze wegen folgende Ausdrucksweise einzuführen:

***Definition* 1.** Es sei:

$$(H.) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_s)$$

irgend eine Differentialgleichung, deren rechte Seite eine fest gegebene

*) Vergl. die Anwendung des Satzes 2^b im folgenden Abschnitt 2, No. 5.

Function ihrer $s+1$ Argumente

$$y, \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_s$$

ist. Dabei sollen

$$\eta_1 = \eta_1(x), \quad \ldots, \quad \eta_s = \eta_s(x)$$

unbestimmte Functionen von x bedeuten, die auch an einander durch keine Bedingungen gebunden sind*). Besitzt nun *erstens* die Differentialgleichung (H.) eine Integralgleichung:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x, y; u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.},$$

deren linke Seite auch für unbestimmte, „unabhängige“ η eine feste, gleichzeitig mit H angebbare Function Ω ihrer $r+2$ Argumente:

$$x, \quad y; \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_r$$

ist, während die u unbestimmte Functionen von x bedeuten, und kann man *zweitens* durch passende Wahl der Functionen $u(x)$ die Gleichung $(\Omega.)$ zur Integralgleichung jeder beliebigen Differentialgleichung der Form (H.) machen, deren Coefficienten η beliebig vorgeschriebene Functionen von x sind, so sagen wir:

„Die Differentialgleichung (H.) lässt sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten η integriren,“

oder auch:

„Die Differentialgleichung (H.) besitzt für unabhängige, unbestimmte Coefficienten η eine Integralgleichung.“

Eine Gleichung:

$$\Omega = \text{Const.}$$

kann ferner so beschaffen sein, dass die aus ihr durch Differentiation hervorgehende Gleichung nicht nur die Gleichung (H.) ergiebt, sondern auch noch andere Differentialgleichungen; sie kann auch so beschaffen sein, dass sie, differentiirt, nur einen Theil derjenigen Differentialgleichungen ergiebt, die aus (H.) entstehen, indem man die η allen möglichen Functionen von x gleich setzt. In beiden Fällen betrachten wir $(\Omega.)$ nicht als wirkliche Integralgleichung von (H.), sondern definiren:

Definition 2. „Die Gleichung $(\Omega.)$ heisst dann und nur dann die Integralgleichung der Differentialgleichung (H.), wenn sie differentiirt alle, aber auch nur diejenigen Differentialgleichungen ergiebt, welche aus (H.) hervorgehen, indem man die η gleich allen möglichen Functionen von x setzt.“

*) d. h. die η sollen „unabhängig“ sein im Sinne der No. 2 des folgenden Abschnittes 2.

Demnach können wir behaupten:

„Die drei Differentialgleichungen (r') lassen sich für unbestimmte, unabhängige Coefficienten $\eta(x)$ integriren, und zwar ist (r) die zur Differentialgleichung (r') zugehörige Integralgleichung."

Da nun hinsichtlich der Frage, wann sich Differentialgleichungen für unbestimmte, unabhängige Coefficienten integriren lassen, die Fälle (r'), $(r = 1, 2, 3)$, unser einziges Erfahrungsgebiet bilden, so hat man wohl bisher stillschweigend als selbstverständlich angenommen, dass eine *jede* Differentialgleichung (H.) sich für unbestimmte, unabhängige Coefficienten η integriren lässt. Daher hat man denn auch bei der Differentialgleichung (4'.) und in verwandten Fällen*) sich bemüht, eine solche Form wirklich aufzufinden. Aber eine Integralgleichung für unbestimmte, unabhängige Coefficienten, welche wirklich den Anforderungen entspricht, die man an eine eigentliche Integralgleichung zu stellen hat, — in dem vorher festgesetzten Sinne — ist bisher nicht gefunden worden. Im Gegentheile ist man schliesslich immer auf Bedingungsgleichungen geführt worden, die zwischen den Coefficienten η der Differentialgleichung bestehen müssen, damit man unter diesen speciellen Bedingungen eine Integralgleichung aufstellen kann.

Es erscheint also vor allen Dingen erforderlich, zu prüfen, ob überhaupt jede Differentialgleichung (H.) mit unbestimmten Coefficienten η für unabhängige, unbestimmte η eine Integralgleichung besitzt. Um dies zu entscheiden, stellen wir uns das folgende Problem:

Problem: „Alle diejenigen Differentialgleichungen erster Ordnung sollen angegeben werden:

$$(\text{H.}) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_s),$$

bei welchen H eine gegebene Function von y ist, deren Coefficienten η unbestimmte, unabhängige Functionen von x sind, und welche für unabhängige, unbestimmte η eine Integralgleichung besitzen:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x,\ y;\ u_1,\ u_2,\ \ldots) = \text{Const.},$$

deren linke Seite eine feste, gleichzeitig mit H angebbare Function ihrer Argumente ist. Dabei sollen die u wieder unbestimmte Functionen von x bedeuten."

---

*) Hinsichtlich der hierhergehörigen Litteratur vergleiche man die Arbeit von ***Häntzschel,*** dieses Journal, Band 112.

Die Lösung dieser Aufgabe wird aber nur dann eine präcise sein können, wenn wir hinsichtlich der Functionen H, welche vorgeschrieben und der Functionen Ω, welche gefunden werden sollen, nur solche zu betrachten uns bescheiden, welche mit den bisherigen Mitteln der Mathematik behandelt werden können und welche noch im Gebiete unserer functionentheoretischen Erfahrungen, nicht aber ausserhalb oder auf der Grenze desselben liegen. Wir halten es deshalb für nothwendig, vorauszusetzen, dass einmal H eine *analytische* Function seiner Argumente bedeutet — eine Beschränkung auf algebraische Functionen H würde im vorliegenden Falle nicht zweckmässig sein — sodann aber, dass Ω eine *endliche* Anzahl von Argumenten enthält:

$$x,\ y;\ u_1, \ldots,\ u_r;$$

ferner soll Ω eine *analytische* Function dieser Argumente sein und endlich sollen die $u_1, \ldots, u_r$ unbestimmte Functionen von x bedeuten. Diese brauchen jedoch nicht unabhängig zu sein, sondern wir wollen ausdrücklich zulassen, dass sie unter einander durch Differentialgleichungen 0ter oder irgend einer Ordnung verbunden sein können; nur dürfen natürlich diese Differentialgleichungen y nicht enthalten und ferner darf ihre Zahl nur so gross sein, dass nicht alle u zu *festen* Functionen von x werden. In diesen Festsetzungen ist offenbar der Fall mit eingeschlossen, dass in der Integralgleichung eine gewisse Anzahl unabhängiger u nebst ihren Ableitungen bis zu einer *endlichen* Ordnung vorkommen.

Da jedoch Ω nur eine endliche Anzahl von Argumenten enthalten soll, so ist jedenfalls ausgeschlossen, dass es zwar eine endliche Anzahl der u, aber auch noch ihre Ableitungen bis zu *unendlich* hoher Ordnung enthält, ohne dass es möglich wäre, die Integralgleichung in eine solche Form zu setzen, dass die linke Seite wieder nur eine endliche Anzahl von Argumenten aufweist. Es ist allerdings nicht zu vergessen, dass gerade derartige unendliche Reihen, welche nach Ableitungen unbestimmter Functionen fortschreiten, eine wichtige Rolle bei dem Problem der Integration von Differentialgleichungen für unbestimmte Coefficienten spielen können. Indessen ist eben, solange man über die Bedeutung solcher Ausdrücke nichts weiss, eine derartige Integration wenn auch vielleicht möglich, so doch werthlos und, wenn man in letzter Zeit auch von verschiedenen Seiten mit der Behandlung von Reihen, welche nach Ableitungen unbestimmter Functionen fortschreiten, begonnen hat — so implicite in der Theorie der unendlichen

Determinanten*) — so sind doch die an sich sehr werthvollen Ergebnisse vorläufig so wenig vollständig, dass wir wohl berechtigt sind, solche Gebilde noch auf die Grenze unseres bisherigen mathematischen Erfahrungsgebietes zu verweisen und demgemäss principiell aus den Betrachtungen dieser Arbeit auszuschliessen.

Wir halten also an unseren oben aufgestellten Beschränkungen des Problems fest und fassen dieselben so zusammen:

Beschränkungen des Problems. „In der Differentialgleichung (H.) soll H eine analytische Function seiner Argumente bedeuten, die linke Seite der Integralgleichung (Ω.) soll nur eine endliche Anzahl von Argumenten enthalten und eine analytische Function derselben sein; für die u der linken Seite ist jedoch eine Verbindung durch Differentialgleichungen zulässig. Diese müssen aber frei von y sein und müssen mindestens eines der u noch eine unbestimmte Function von x bleiben lassen."

Durch diese Festsetzungen hat unser Problem einen bestimmten Sinn erhalten. Die folgenden Untersuchungen lösen dasselbe und gelangen zu dem Resultate:

Theorem. *„Die einzigen Differentialgleichungen, welche sich für unabhängige, unbestimmte Coefficienten durch analytische Functionen von y und einer endlichen Anzahl anderer Argumente integriren lassen, sind die drei Typen* (1'.), (2'.), (3'.) *und alle diejenigen, welche aus ihnen hervorgehen durch die Substitution:*

$$y_1 = \psi(y),$$

in welcher ψ eine beliebige Function bedeutet."

Mithin ist die Vermuthung, dass eine Integration für unbestimmte Coefficienten bei jeder Differentialgleichung und im besonderen bei der Gleichung (4'.) oder verwandten möglich ist, nicht bestätigt, so lange man der Integralgleichung die oben angeführten Beschränkungen auferlegt. Diese sind aber nothwendig, wie uns scheint, solange wir uns auf dem Boden unserer bisherigen Erfahrungen bewegen.

Um unseren Satz zu begründen, sind einige Betrachtungen über unbestimmte Functionen im allgemeinen anzustellen, deren Ergebnisse zwar vorherzusehen sind, deren Ableitung aber doch zur Begründung des Fol-

*) Man vergl. hierzu z. B. die grundlegende Arbeit: ***Helge von Koch,*** sur les déterminants infinis. Acta mathematica Bd. 16, wo sich auch weitere Litteraturnachweise finden.

genden unentbehrlich erschien. Diese vielleicht auch an sich nicht uninteressanten Untersuchungen bilden den Abschnitt 2. Im dritten Abschnitte werden dieselben auf unser Problem angewandt.

Es zeigt sich dabei, dass der *Lie*sche Begriff der continuirlichen Transformationsgruppe*) für unsere Aufgabe von entscheidender Bedeutung wird. Diese reducirt sich nämlich einfach auf eine Frage, welche der Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen angehört und die bereits vor einigen Jahren von *Lie* selbst vollständig erledigt ist. War dies einmal erkannt, so bedurfte es nur der Uebertragung der Resultate *Lie*s auf unseren Fall, um zu der vorher angegebenen Lösung unseres Problems zu gelangen.

Wir wollen nur noch hinzufügen, dass wir uns hinsichtlich der *Bezeichnungsweise* soweit als möglich an diejenige *Lie*s anzuschliessen suchten, wie dies auch bisher bereits geschehen ist. Diese ist eine consequente und einheitliche eigentlich für alle Differentialgleichungen; es dürfte also dem Verständnisse und der Verständigung nur zugute kommen, wenn sie in Zukunft allgemein angewandt würde.

2.

Unbestimmte Functionen einer Veränderlichen.

Die unbestimmten Functionen oder — wie wir sie zuweilen auch der Kürze halber werden nennen müssen — die „Unbestimmten“ zeigen ein den Variabeln analoges Verhalten. Der Begriff der unbestimmten Function ist jedoch ein allgemeinerer, welcher in gewisser Weise den der Variabeln in sich enthält.

1. Wir beschäftigen uns hier nur mit unbestimmten Functionen *einer* Veränderlichen und bezeichnen sie durch:

$$u = u(x),$$

ihre Ableitungen nach x deuten wir durch Accente an:

$$u' = u'(x), \quad u^{(2)} = u^{(2)}(x), \quad \ldots$$

Ist x_0 ein beliebiger, aber fester Werth von x, so kann man immer Functionen u (z. B. ganze rationale) bilden, so dass für $x = x_0$ die u, u', ... beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen:

$$u_0 = u(x_0), \quad u_0' = u'(x_0), \quad \ldots, \quad u_0^{(\lambda)} = u^{(\lambda)}(x_0).$$

---

*) *Lie*, Theorie der Transformationsgruppen I, Leipzig 1888. — Die Definition der „Gruppe“ findet man auf den ersten Seiten.

Dies gilt, wie gross auch die Ordnungszahl λ sein mag. So ist ja

$$f(x) = \sum_{0}^{\lambda}{}_{\alpha} \frac{u_0^{(\alpha)}}{\alpha!}(x-x_0)^{\alpha}$$

eine solche Function. Eine unbestimmte Function ist also dadurch gewissermassen definirt, dass die zu einem festen Werthe x_0 von x gehörigen Werthe ihrer Ableitungen:

$$u_0, \quad u_0', \quad u_0^{(2)}, \quad \ldots$$

unabhängige Variable sind. Daher kann eine unbestimmte Function niemals Integral einer Differentialgleichung irgend einer endlichen Ordnung sein.

Wir nennen deshalb eine Gleichung:

$$G(x;\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(\lambda)}) = 0$$

eine Identität für eine unbestimmte Function u von x, sobald sie eine Identität ist, wenn man sämmtliche Grössen

$$x, \quad u, \quad u', \quad \ldots, \quad u^{(\lambda)}$$

als unabhängige Variable betrachtet.

Sind zwei unbestimmte Functionen u, v derselben Variablen x durch eine Differentialgleichung an einander gebunden,

$$G(x;\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(\lambda)};\ v,\ v',\ \ldots,\ v^{(\mu)}) = 0,$$

welche keine Identität ist, so kann man alle Argumente bis auf eines, welches in G aber auch wirklich vorkommen muss, als unabhängige, jenes eine als von diesen abhängige Variable betrachten.

2. Wir nennen r unbestimmte Functionen einer Variablen x:

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r$$

von einander unabhängig, wenn — wie gross auch die Ordnungszahl λ sein mag —

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_1^{(\lambda)}, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_2^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad u_r, \quad \ldots, \quad u_r^{(\lambda)}$$

unabhängige Variable sind. r unabhängige unbestimmte Functionen sind daher niemals durch eine Differentialgleichung irgend einer endlichen (incl. 0ter) Ordnung verbunden. Was man unter einer Identität zwischen r unabhängigen, unbestimmten Functionen zu verstehen hat, ist nach dem Vorhergehenden selbstverständlich.

3. Eine Function von x, den u und ihren Ableitungen bis zur λten Ordnung wollen wir eine „Differentialfunction*) λter Ordnung“ der u nennen

*) *Vessiot* schlägt einfach „Function“ vor. a. a. O. Für unsere Bezeichnungsweise können wir die Autorität *Lagranges* anführen, welcher sie in ganz ähnlichem Sinne in seiner Mécanique analytique I, 4ième section, pag. 77 gebraucht.

und sie bezeichnen durch:

$$f(x, u_1, \ldots, u_r; \ldots; u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}) = f(u_1, \ldots, u_r)_\lambda.$$

Also ist

$$f(u_1, \ldots, u_r)_0$$

eine gewöhnliche Function der u, welche jedoch in den Coefficienten noch die Variable x enthalten darf. Soll die Ordnung nicht näher angegeben werden, so schreiben wir:

$$f(x; u_1, \ldots, u_r; u_1', \ldots, u_r'; \ldots) = f(u_1, \ldots, u_r)'.$$

Natürlich giebt es auch Differentialfunctionen unendlich hoher Ordnung; z. B. ist eine der einfachsten:

$$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} e^x u\,dx = \sum_0^\infty{}_\alpha (-1)^\alpha u^{(\alpha)}.$$

Solche bleiben jedoch im Folgenden ganz und gar ausser Betracht.

4. Mit Hülfe von Differentialfunctionen endlicher Ordnung kann man r unabhängige Unbestimmte:

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_r$$

in s neue Unbestimmte

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_s$$

transformiren:

$$v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)'. \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

Ist λ dabei die Ordnung der höchsten Ableitung der u, welche in den s Differentialfunctionen f vorkommt, so nennen wir die Transformation eine solche λter Ordnung und schreiben sie in der Form:

(f.) $$v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_s)_\lambda. \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

Besteht zwischen x, den s Unbestimmten v und ihren Ableitungen eine Identität, und werden an Stelle der v aus (f.) die u eingeführt, so bleibt die Gleichung eine Identität auch für die u. Umgekehrt, wenn eine Identität zwischen den Unbestimmten u diese nebst ihren Ableitungen nur in den durch (f.) definirten Verbindungen enthält: $v_1, v_2, \ldots, v_s$, so bleibt die Gleichung auch eine Identität für die v.

Für uns handelt es sich jetzt hauptsächlich darum, zu entscheiden, wann die r unabhängigen unbestimmten Functionen u durch die Transformation (f.) wieder in unabhängige unbestimmte Functionen v übergeführt werden und wann auch bei unabhängigen u durch die specielle Natur der

Transformation (f.) sich für die v Differentialgleichungen (incl. 0ter Ordnung) ergeben.

Wir begreifen unter dem Worte „Differentialgleichungen“ im Folgenden auch die gewöhnlichen Gleichungen als Differentialgleichungen 0ter Ordnung.

5. Wenn sich aus den Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (a=1, \ldots, s)$$

Differentialgleichungen zwischen den v ergeben, welches auch die u für Functionen von x sein mögen, so sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, welche in dem Systeme vorkommt, von der μten Ordnung. Alsdann müssen sich aus dem Systeme von $s(\varkappa+1)$ Gleichungen:

$$(f'.) \qquad \begin{cases} v_a = f_a(u, \ldots, u_r)_\lambda, & (a=1, \ldots, s) \\ v'_a = f_{a1}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+1} = \varphi_{a1}(u_1, \ldots, u_r)_\lambda + \sum_1^r{}_\beta \dfrac{\partial v_a}{\partial u_\beta^{(\lambda)}} \cdot u_\beta^{(\lambda+1)}, \\ v_a^{(2)} = f_{a2}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+2} = \varphi_{a2}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+1} + \sum_1^r{}_\beta \dfrac{\partial v'_a}{\partial u_\beta^{(\lambda+1)}} \cdot u_\beta^{(\lambda+2)}, \\ \vdots \\ v_a^{(\varkappa)} = f_{a\varkappa}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+\varkappa} = \varphi_{a\varkappa}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+\varkappa-1} + \sum_1^r{}_\beta \dfrac{\partial v_a^{(\varkappa-1)}}{\partial u_\beta^{(\lambda+\varkappa-1)}} \cdot u_\beta^{(\lambda+\varkappa)}, \end{cases}$$

welches aus (f.) durch $\varkappa$-malige Differentiation entstanden ist, alle $r(\lambda+\varkappa+1)$ Grössen u für $\varkappa = \mu$ eliminiren lassen, während dies für $\varkappa = \mu-1$ jedenfalls nicht möglich ist.

I. Ist nun zunächst $s > r$, so lässt sich eine solche Zahl μ immer finden. Bestimmen wir nämlich eine Zahl ν so, dass:

$$s(\nu+1) - r(\lambda+\nu+1) > 0,$$

d. h.:

$$\nu+1 > \frac{r\lambda}{s-r}$$

wird, wozu

$$\nu = \left[\frac{r\lambda}{s-r}\right]$$

ausreicht, so lassen sich aus dem durch ν-malige Differentiation gebildeten Systeme (f'.) sicher alle u eliminiren, und daher kann die Zahl μ die Zahl ν nicht überschreiten. Wir haben also:

***Satz* 1.** Werden r unabhängige Unbestimmte $u_1, \ldots, u_r$ in $s > r$ neue Unbestimmte $v_1, \ldots, v_s$ transformirt vermöge der Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_\lambda, \qquad (a=1, \ldots, s)$$

so folgen zwischen den v Differentialgleichungen, und zwar ist mindestens eine derselben von nicht höherer als $\left[\frac{r\lambda}{s-r}\right]$-ter Ordnung.

II. Ist dagegen $s \leqq r$, so wird immer:

$$s(\varkappa+1)-r(\lambda+\varkappa+1) > 0$$

sein, d. h. die Anzahl der u übertrifft immer die der Gleichungen, wie gross auch die Ordnung $\varkappa$ gewählt werden mag. Im allgemeinen werden daher, wenn $s \leqq r$, aus (f.) keine Differentialgleichungen zwischen den v folgen; es kann sich jedoch ereignen, dass die u nur in einer geringeren Anzahl von Verbindungen in den f_α vorkommen und es werden auch für $s \leqq r$ sich für die v Differentialgleichungen aus (f.) ergeben, wenn die sämmtlichen Determinanten $s(\mu+1)$-ter Ordnung der Matrix

$$M_\mu = \left(\frac{\partial v_\alpha^{(\beta)}}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}}\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, s, \ \beta = 0, \ldots, \mu \\ \alpha' = 1, \ldots, r, \ \beta' = 0, \ldots, \lambda+\mu \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Dabei sollen die $r(\lambda+\mu+1)$ Horizontalen der Matrix M_μ dadurch gebildet werden, dass α', β' alle angegebenen Werthe durchlaufen, während die $s(\mu+1)$ Verticalen durch Variation der α, β entstehen. Unserer Voraussetzung gemäss soll μ die niedrigste Zahl bedeuten, für welche die angegebenen Determinanten verschwinden, für $\mu+1, \mu+2, \ldots$ sind dann die analogen Determinanten der Matrices $M_{\mu+1}, \ldots$ von selbst Null. Für μ lässt sich eine obere Grenze angeben. Wir werden nämlich später zeigen (No. 9 dieses Abschnittes), dass die v sich als Differentialfunctionen von höchstens $s-1$ unabhängigen Unbestimmten darstellen lassen, wenn aus (f.) Differentialgleichungen zwischen den v folgen. Es sei $s-\varrho$ die wirkliche Zahl jener unabhängigen Unbestimmten, sodass $\varrho \geqq 1$ ist. Denken wir uns diese an Stelle der u in (f.) eingeführt, so sind wir wieder bei dem Falle I angelangt, in welchem $s > r$ ist; indem nun r den Werth $s-\varrho$ hat. Demnach wird μ die Zahl

$$\nu = \left[\frac{(s-\varrho)\lambda}{\varrho}\right] = \left[\left(\frac{s}{\varrho}-1\right)\lambda\right]$$

nicht übersteigen können. Diese erreicht aber ihr Maximum für $\varrho = 1$, nämlich $(s-1)\lambda$, welches wir mit μ_0 bezeichnen wollen. Wir haben also:

$$\mu \leqq (s-1)\lambda = \mu_0.$$

Es werden also sicherlich alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix M_{μ_0} identisch verschwinden, wenn zwischen den v Differentialgleichun-

gen bestehen und umgekehrt, wenn alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix M_{μ_0} identisch verschwinden, so bestehen eine oder mehrere Gleichungen 0ter oder höherer Ordnung zwischen den v. Wir haben also folgendes Kriterium gewonnen:

***Satz* 2.** „Ist $s \leqq r$, so werden in dem Systeme

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda, \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

welches die r unabhängigen Unbestimmten u in $s \leqq r$ neue v transformirt, diese v ebenfalls unabhängig, wenn nicht alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix:

$$M_{\mu_0} = \left(\frac{\partial v_\alpha^{(\beta)}}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s, & \beta = 0, \ldots, \mu_0 \\ \alpha' = 1, \ldots, r, & \beta' = 0, \ldots, \lambda + \mu_0\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\mu_0 = (s-1)\lambda.\text{“}$$

Wir führen nun die Definition ein:

***Definition* 3.** Der Fall, dass nicht alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix M_{μ_0} identisch verschwinden, soll der „allgemeine“ heissen.

Dann können wir den Satz aussprechen:

***Satz* 2ª.** „Ist $s \leqq r$, so werden in dem Systeme:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda, \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

im *allgemeinen* die v unabhängige Unbestimmte sein, wenn es die u sind.“

Handelt es sich nur darum, nachzuweisen, dass in einem gegebenen Falle die $s \leqq r$ Grössen v, in welche die r unabhängigen Unbestimmten u durch das System (f.) transformirt werden, von einander unabhängig sind, so lässt sich das Kriterium des Satzes 2. durch ein einfacheres ersetzen, welches für die Praxis häufig ausreicht. Es lautet:

***Satz* 2ᵇ.** „Werden die r unabhängigen Unbestimmten $u_1, \ldots, u_r$ durch die Transformation:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda, \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

in $s \leqq r$ neue Unbestimmte v transformirt, so sind diese jedenfalls dann immer von einander unabhängig, wenn nicht alle Determinanten $s$ter Ordnung der Matrix:

$$M_\lambda = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda)}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s \\ \beta = 1, \ldots, r\end{pmatrix}$$

identisch Null sind.“ Denn da zufolge der Gleichungen (f′.)

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda)}} = \frac{\partial v'_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda+1)}} = \frac{\partial v_\alpha^{(2)}}{\partial u_\beta^{(\lambda+2)}} = \text{u. s. w. ad. inf.}$$

wird, so lassen sich die ersten s Gleichungen des Systems (f'.) nach s der $u^{(\lambda)}$, die nächsten s nach s der $u^{(\lambda+1)}$, u. s. w. ad. inf. auflösen. Mithin lassen sich die u niemals aus dem Systeme (f'.) eliminiren, wie gross man auch die Zahl $\varkappa$ wählen mag. Hiermit ist unser Satz erwiesen.

Anwendung. Wir hatten in dem ersten Abschnitte behauptet, dass die unbestimmten Functionen η, welche durch das System (r^a) $(r = 1, 2, 3)$ — wie wir jetzt sagen können — als Differentialfunctionen der u definirt wurden, bei passender Wahl der u gleich jeden beliebigen vorgeschriebenen Functionen von x werden könnten. Wir haben dies dort als allgemein bekannt vorausgesetzt; durch unseren letzten Satz 2^b lässt sich dies aber auch sehr einfach beweisen. Betrachten wir in der That beispielsweise das System $(3^a.)$, welches die Systeme $(1^a.)$, $(2^a.)$ als specielle Fälle umfasst, so war dies ja:

$$(3^a.)\qquad \begin{cases} \eta_2 = -\dfrac{u_1' u_3 - u_1 u_3'}{u_1 u_2 - u_0 u_3}, \quad \eta_0 = -\dfrac{u_0' u_2 - u_0 u_2'}{u_1 u_2 - u_0 u_3}, \\ \eta_1 = -\dfrac{(u_0' u_3 - u_0 u_3') + (u_1' u_2 - u_1 u_2')}{u_1 u_2 - u_0 u_3}. \end{cases}$$

Die η werden offenbar dann und nur dann gleich allen möglichen Functionen von x werden können, wenn die Gleichungen $(3^a.)$, aufgefasst als eine Transformation der $r = 4$ unabhängigen Unbestimmten u in $s = 3 < r$ neue η, diese wieder zu *unabhängigen* Unbestimmten macht. Das ist aber dann und nur dann der Fall (Satz $2^a.$), wenn die Gleichungen $(3^a.)$ von „allgemeiner" Form sind. Nach Satz 2^b sind wir dessen aber sicher, sobald nicht alle Determinanten $s = 3$ ter Ordnung der Matrix:

$$\left(\frac{\partial \eta_a}{\partial u_0'}, \frac{\partial \eta_a}{\partial u_1'}, \frac{\partial \eta_a}{\partial u_2'}, \frac{\partial \eta_a}{\partial u_3'}\right) \qquad (a = 0, 1, 2)$$

identisch für beliebige Unbestimmte u verschwinden. Nun wird aber schon die Determinante

$$\left|\frac{\partial \eta^a}{\partial u_0'}, \frac{\partial \eta_a}{\partial u_1'}, \frac{\partial \eta_a}{\partial u_2'}\right| = -\frac{u_3}{(u_1 u_2 - u_0 u_3)^2} \qquad (a = 0, 1, 2)$$

nicht identisch Null, also sind die η_0, η_1, η_2 des Systems $(3^a.)$ wirklich unabhängig.

6. Wir wollen annehmen, dass die Bedingungen des Falles, den wir vorher als den „allgemeinen" definirt haben, erfüllt sind. Dann transformiren die s Gleichungen:

$$(f.)\qquad v_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (a = 1, \ldots, s)$$

die r unabhängigen Unbestimmten u in s neue v, welche wieder unabhängig sein werden, wenn a)

$$s = r$$

ist. Ist b)

$$s < r,$$

so denken wir uns, um die Ideen zu fixiren die Bezeichnungsweise so gewählt, dass nicht alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix

$$\overline{M}_{\mu_0} = \left(\frac{\partial v_\alpha^{(\beta)}}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s, \ \beta = 0, \ldots, \mu_0 \\ \alpha' = 1, \ldots, s, \ \beta' = 0, \ldots, \lambda+\mu_0\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Dabei sind Horizontalen und Verticalen der Matrix in der bekannten, vorher definirten Weise zu bilden, und μ_0 bedeutet wieder die Zahl $(s-1)\lambda$. Der Umstand, dass nicht alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix $\overline{M}_{\mu_0}$ identisch verschwinden, zeigt uns aber, dass die v, als Differentialfunctionen von $u_1, \ldots, u_s$ betrachtet, schon von einander unabhängig sind. Sie bleiben daher auch dann noch unabhängig, wenn wir in der Transformation (f.) $u_{s+1}, \ldots, u_r$ zu irgend festen, aber allgemeinen Functionen specialisiren, so dass wir erhalten:

$$(f^0.) \qquad v_\alpha = f_\alpha^{(1)}(u_1, \ldots, u_s)_\lambda. \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

Ist endlich c)

$$s > r,$$

so werden wir, dem Vorigen entsprechend, denjenigen Fall als den „allgemeinen" zu bezeichnen haben, bei welchem nicht alle Determinanten $r(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix M_{μ_0} identisch verschwinden. Jedenfalls bestehen jetzt Differentialgleichungen zwischen den v (Satz 1.). Wir fragen nach der Anzahl derselben, unter der Voraussetzung, dass die Transformation (f.) dem eben als „allgemein" definirten Falle angehöre.

Um die Frage zu beantworten, denken wir uns wieder die Bezeichnungsweise so gewählt, dass nicht alle Determinanten $r(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix:

$$\mathfrak{M}_{\mu_0} = \left(\frac{\partial v_\alpha^{(\beta)}}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, r, \ \beta = 0, \ldots, \mu_0 \\ \alpha' = 1, \ldots, r, \ \beta' = 0, \ldots, \lambda+\mu_0\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Alsdann behaupten wir, dass aus den $r+1$ Gleichungen:

$$v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, r+1)$$

durch Elimination der u gerade eine und nur eine Differentialgleichung

zwischen $v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}$ folgt. Da nämlich die Anzahl der v grösser ist als die der u, bestehen sicher überhaupt Differentialgleichungen zwischen den v nach Satz 1. Würde die Anzahl derselben grösser als 1 sein, so wäre sie mindestens 2. Dann liesse sich aber durch Elimination von v_{r+1} eine Differentialgleichung zwischen $v_1, \ldots, v_r$ allein bilden. Zwischen $v_1, \ldots, v_r$ besteht aber keine solche, da nach unserer Bezeichnungsweise nicht alle Determinanten $r(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix $\mathfrak{M}_{\mu_0}$ verschwinden. Mithin kann die Anzahl der Differentialgleichungen, die zwischen $v_1, \ldots, v_{r+1}$ bestehen, auch nicht grösser sein als 1. Es folgt also aus (f.) genau *eine* Differentialgleichung zwischen:

$$v_1, \ldots, v_r; \quad v_{r+1}.$$

Aus denselben Gründen besteht gerade *eine* Differentialgleichung auch zwischen

$$v_1, \ldots, v_r; \quad v_{r+2}$$

u. s. w., schliesslich auch zwischen

$$v_1, \ldots, v_r; \quad v_s.$$

Es ergeben sich also in unserem Falle genau $s-r$ unabhängige Differentialgleichungen zwischen den v. Hiermit ist die verlangte Anzahlbestimmung geleistet.

Wir fassen die Betrachtungen dieser Nummer folgendermassen zusammen. Zunächst bedienen wir uns der Ausdrucksweise:

Definition 4. Bestehen die Transformationsgleichungen:

$$\text{(f.)} \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

der r unabhängigen Unbestimmten u in s neue Unbestimmte v, so nennen wir denjenigen Fall den „allgemeinen", in welchem nicht alle Determinanten $s(\mu_0+1)$-ter Ordnung der Matrix

$$M_{\mu_0} = \left(\frac{\partial v_\alpha^{(\beta)}}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}}\right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, s, & \beta = 0, \ldots, \mu_0 \\ \alpha' = 1, \ldots, r, & \beta' = 0, \ldots, \lambda+\mu_0 \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden, falls $s \leqq r$ ist. Ist aber $s > r$, so nennen wir denjenigen Fall den allgemeinen, in welchem nicht alle Determinanten $r(\mu_0+1)$-ter Ordnung identisch verschwinden. Dabei bedeutet im ersten Falle μ_0 die Zahl $(s-1)\lambda$, im zweiten die Zahl $(r-1)\lambda$.

Führen wir diese Sprechweise ein, welche übrigens — wie man sieht — der bei der Transformation von Variablen üblichen nachgebildet ist, so können wir sagen:

Satz. 3. „Gehört die Transformation:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

dem allgemeinen Falle an, so werden, wenn a)

$$s = r$$

ist, die r unabhängigen Unbestimmten u wieder in r unabhängige Unbestimmte v übergeführt. Ist b)

$$s < r,$$

so können noch $r-s$ der Unbestimmten u gleich festen, aber allgemeinen Functionen von x gesetzt werden, so dass die Transformation (f.) in eine solche übergeht, welche nur noch s Unbestimmte, etwa nur $u_1, \ldots, u_s$ enthält:

$$(f^0.) \qquad v_\alpha = f_\alpha^0(u_1, \ldots, u_s)_\lambda. \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

Alsdann bleiben die v immer noch unabhängige Unbestimmte.

Ist endlich c)

$$s > r,$$

so folgen aus (f.) gerade $s-r$ unabhängige Differentialgleichungen zwischen den v".

7. Es fragt sich jetzt, welches die Gestalt der Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

ist, wenn der Fall, welcher soeben als der „allgemeine" bezeichnet wurde (Definition 4), nicht eintritt. Hierbei fassen wir zunächst die Möglichkeit

$$s \leqq r$$

als die wichtigere ins Auge. Es handelt sich dann für uns darum, anzugeben, welches die Form der Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

für $s \leqq r$ sein muss, damit sich die u durch Differentiationen und Eliminationen nebst ihren sämmtlichen Ableitungen aus ihnen herausschaffen lassen, so dass sich Differentialgleichungen 0ter, 1ter oder höherer Ordnung zwischen den v allein ergeben, welche zu Identitäten werden, wenn man an Stelle der v mit Hülfe der Gleichungen (f.) die u einführt.

Wenn zunächst gewöhnliche Gleichungen, d. h. Differentialgleichungen 0ter Ordnung zwischen den v bestehen, so ist schon aus der Transformationstheorie der Variabeln bekannt, dass dann die $r(\lambda+1)$ Grössen:

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_r^{(\lambda)},$$

welche in (f.) als Argumente auftreten, nur in weniger als s Verbindungen in den f_α vorkommen dürfen, und dass eine gewisse Anzahl der v gewöhnliche Functionen oder in unserer Sprechweise Differentialfunctionen 0ter Ordnung der übrigen werden, dass aber diese letzteren durch keine Gleichung, d. h. keine Differentialgleichung 0ter Ordnung mehr verbunden sind. Nehmen wir daher an, dass aus den Gleichungen (f.) durch Differentiation und Elimination sämmtlicher u Differentialgleichungen 0ter, 1ter, 2ter und höherer Ordnung zwischen den v folgen, so sei z. B. $s-\varrho$ die Anzahl aller verschiedenen Differentialgleichungen 0ter Ordnung dieses Systems (Σ), dann sind ϱ der v, etwa

$$v_1, \quad \ldots, \quad v_\varrho$$

durch keine Differentialgleichungen 0ter Ordnung mehr verbunden;

$$v_{\varrho+1}, \quad \ldots, \quad v_s$$

aber sind Differentialfunctionen 0ter Ordnung von:

$$v_1, \quad \ldots, \quad v_\varrho.$$

Indem wir nun die Werthe der

$$v_{\varrho+1}, \quad \ldots, \quad v_s$$

als Functionen der

$$v_1, \quad \ldots, \quad v_\varrho$$

in das System (Σ) einführen, geht dieses über in ein System (Σ_1) von Differentialgleichungen 1ter, 2ter oder höherer Ordnung zwischen den Unbestimmten $v_1, \ldots, v_\varrho$, welches aber keine Differentialgleichungen 0ter Ordnung mehr enthält. Die Differentialgleichungen des Systems (Σ_1) werden zu Identitäten, wenn aus den Gleichungen:

$$v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varrho)$$

die u an Stelle der v eingeführt werden.

Wir brauchen uns daher nur noch mit solchen Systemen (f.) zu beschäftigen, aus welchen keine Differentialgleichungen 0ter Ordnung, sondern nur solche 1ter oder höherer Ordnung zwischen den v folgen. Dabei haben wir als selbstverständlich vorauszusetzen, dass die Anzahl der verschiedenen Differentialgleichungen des Systems (Σ) geringer ist als die der Unbestimmten v, da sonst kein einziges von diesen eine unbestimmte Function von x bleiben würde. Da bekanntlich jedes System von Differentialgleichungen erster oder höherer Ordnung sich als ein solches von lauter Differential-

gleichungen erster Ordnung allein auffassen lässt, so wird es hauptsächlich darauf ankommen zu entscheiden, welches die Form der Gleichungen:

$$v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s) \tag{f.}$$

sein muss, wenn aus ihnen nur eine gewisse Anzahl von Differentialgleichungen erster Ordnung folgt, aber keine 0ter Ordnung, sowie keine höherer Ordnung, welche nicht eine Folge jener Differentialgleichungen erster Ordnung ist. In erster Linie wird nun hierbei die Möglichkeit in Betracht kommen, dass aus den Gleichungen (f.) keine Differentialgleichung 0ter Ordnung zwischen den v folgt, dagegen eine und nur eine erster Ordnung, aber keine neue höherer Ordnung.

Diesen Fall wollen wir jetzt erörtern und also die eben gemachten Annahmen als erfüllt ansehen. Wir erinnern zunächst an unseren Satz 2^b; nach diesem müssen, wenn überhaupt zwischen den v irgend welche Relationen bestehen sollen, jedenfalls sämmtliche Determinanten $s$ter Ordnung der Matrix:

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda)}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s\\ \beta = 1, \ldots, r\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Wir erinnern daran, dass wir ja jetzt immer $s \leqq r$ voraussetzen. Die $u^{(\lambda)}$ können mithin in den f_α in nicht mehr als $s-1$ verschiedenen Verbindungen auftreten.

Der Genauigkeit wegen flechten wir hier folgende Definition ein:

Definition 5. „Irgend welche Unbestimmte, welche Differentialfunctionen anderer Unbestimmter sein können — wie z. B. die v in (f.) — nennen wir wie früher *„unabhängig“*, wenn zwischen ihnen keine Differentialgleichung 0ter oder irgend einer Ordnung besteht; wir nennen sie *„verschieden“*, wenn zwischen ihnen keine Gleichung 0ter Ordnung besteht, während Differentialgleichungen erster oder höherer Ordnung vorkommen dürfen.“

In diesem Sinne also können die $u^{(\lambda)}$ in den f_α in nicht mehr als $s-1$ „verschiedenen“ Verbindungen vorkommen. Möglicherweise kann jedoch die Zahl derselben geringer sein; sie sei daher allgemein

$$s-\varrho,$$

so dass:

$$1 \leqq \varrho \leqq s-1.$$

Dann ist jedenfalls eine Determinante $(s-\varrho)$-ter Ordnung der Matrix:

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda)}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s\\ \beta = 1, \ldots, r\end{pmatrix}$$

von 0 verschieden, während die Determinanten $(s-\varrho+1)$-ter Ordnung sämmtlich verschwinden. Die Bezeichnungsweise sei so gewählt, dass die Determinante:

$$\left|\frac{\partial v_\alpha}{\partial u_\beta^{(\lambda)}}\right| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, s-\varrho)$$

von 0 verschieden ist. Dann lassen sich aus den s ersten Gleichungen des Systemes (f.) $u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_{s-\varrho}^{(\lambda)}$ ausrechnen:

$$(g_1.) \qquad u_\alpha^{(\lambda)} = g_\alpha(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)};\ u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, s-\varrho)$$

Setzt man aber diese Werthe der $u_1^{(\lambda)}, \ldots, u_{s-\varrho}^{(\lambda)}$ in die ϱ übrigen Gleichungen des Systems (f.) ein, so werden diese von selbst unabhängig von $u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}$. Man erhält also:

$$(g_2.) \qquad v_{s-\varrho+\beta} = \mathfrak{f}_\beta(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}). \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

Die Gleichungen $(g_1.)$ und $(g_2.)$ sind gerade s an Zahl und nur eine andere Schreibweise der ursprünglichen Gleichungen (f.). Aus ihnen und den durch einmalige Differentiation abgeleiteten Gleichungen sollen sich aber sämmtliche Grössen u eliminiren lassen. Durch Differentiation folgt aber aus $(g_1.)$ und $(g_2.)$:

$$(g_1'.) \quad u_\alpha^{(\lambda+1)} = g_{\alpha 1}(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ \underset{(\alpha = 1, \ldots, s-\varrho)}{v_1', \ldots, v_{s-\varrho}'};\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda)};\ u_{s-\varrho+1}^{(\lambda+1)}, \ldots, u_r^{(\lambda+1)}),$$

$$(g_2'.) \quad v_{s-\varrho+\beta}' = \mathfrak{f}_{\beta 1}(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ v_1', \ldots, v_{s-\varrho}';\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda)}). \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

Wenn nun aus den 2ϱ Gleichungen $(g_1.)$, $(g_2.)$, $(g_1'.)$, $(g_2'.)$ sämmtliche u, welche als unabhängige Variable zu betrachten sind, eliminirt werden können, so geht dies jedenfalls schon ohne Zuhülfenahme der Gleichungen $(g_1'.)$; denn diese definiren nur ϱ neue Veränderliche:

$$u_1^{(\lambda+1)}, \ \ldots, \ u_{s-\varrho}^{(\lambda+1)}$$

in ihrer Abhängigkeit von den übrigen. Jene ϱ Veränderlichen

$$u_1^{(\lambda+1)}, \ \ldots, \ u_{s-\varrho}^{(\lambda+1)}$$

kommen aber in den übrigen $s+\varrho$ Gleichungen $(g_1.)$, $(g_2.)$, $(g_2'.)$ gar nicht vor. Also müssen sich sämmtliche u schon aus den $s+\varrho$ Gleichungen eliminiren lassen:

$$(g_1.) \quad u_\alpha^{(\lambda)} = g_\alpha(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)};\ u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}), \qquad (\alpha = 1, \ldots, s-\varrho)$$

$$(g_2.) \quad v_{s-\varrho+\beta} = \mathfrak{f}_\beta(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}), \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

$$(g_2'.) \quad v_{s-\varrho+\beta}' = \mathfrak{f}_{\beta 1}(v_1, \ldots, v_{s-\varrho};\ v_1', \ldots, v_{s-\varrho}';\ u_1, \ldots, u_r^{(\lambda)}). \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

Wir wollen die in Rede stehende Elimination in der Weise ausführen, dass wir die Werthe der

$$u_1^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad u_{s-\varrho}^{(\lambda)}$$

aus den Gleichungen $(g_1.)$ in die Gleichungen $(g_2'.)$ eintragen. Diese nehmen dann die Gestalt an:

$$v'_{s-\varrho+\beta} = \mathfrak{f}_{\beta 1}(v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; v'_1, \ldots, v'_{s-\varrho}; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}; u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}).$$

Da die $\mathfrak{f}_{\beta 1}$ der Gleichungen $(g_2'.)$ durch Differentiation aus den $\mathfrak{f}_\beta$ der Gleichungen $(g_2.)$ hervorgegangen sind, so ergiebt sich, dass unsere zuletzt aufgestellten Gleichungen die Form haben:

$$\begin{cases} v'_{s-\varrho+\beta} = \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial x} + \sum_1^{s-\varrho}{}_\alpha \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial v_\alpha} \cdot v'_\alpha + \Sigma_{\alpha'\beta'} \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial u_{\alpha'}^{(\beta')}} u_{\alpha'}^{(\beta'+1)} & \begin{pmatrix}\alpha' = 1, \ldots, r \\ \beta' = 0, \ldots, \lambda-2\end{pmatrix} \\ \quad + \sum_1^{s-\varrho}{}_\alpha \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial u_\alpha^{(\lambda-1)}} \cdot g_\alpha(v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}; u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}) \\ \quad + \sum_{s-\varrho+1}^{r}{}_\gamma \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial u_\gamma^{(\lambda-1)}} \cdot u_\gamma^{(\lambda)}. \end{cases}$$

Definiren wir nun ϱ neue Grössen ω durch die Gleichungen:

$$(\omega.) \qquad \begin{cases} \omega_{s-\varrho+\beta} = v'_{s-\varrho+\beta} - \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial x} - \sum_1^{s-\varrho}{}_\alpha \dfrac{\partial \mathfrak{f}_\beta}{\partial v_\alpha} \cdot v'_\alpha \\ \qquad = \omega_{s-\varrho+\beta}(v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; v'_1, \ldots, v'_s; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}) \end{cases} \quad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

und bemerken, dass unser eben aufgeschriebenes Gleichungssystem für $v'_{s-\varrho+\beta}$ sämmtliche v' nur in den ϱ durch die Gleichungen $(\omega.)$ definirten Verbindungen enthält, so lässt sich jenes in die Form setzen:

$$\omega_{s-\varrho+\beta} = \mathfrak{F}_\beta(v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}, u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}) \quad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

oder auch:

$$(F.) \quad F_\beta(\omega_{s-\varrho+\beta}; v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}, u_{s-\varrho+1}^{(\lambda)}, \ldots, u_r^{(\lambda)}) = 0. \quad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

Diese Gleichungen stellen das Eliminationsresultat aus den Gleichungen $(g_1.)$ und $(g_2'.)$ vor. Nehmen wir also zu den Gleichungen (F.) noch die Gleichungen $(g_2.)$, welche wir in die Form setzen können:

$$(G.) \qquad G_\beta(v_{s-\varrho+\beta}; v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u_1, \ldots, u_r^{(\lambda-1)}) = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

hinzu, so ergiebt sich ein System von 2ϱ Gleichungen, aus welchem sich alle u eliminiren lassen müssen, von der Form:

$$(FG.) \qquad \begin{cases} F_\beta(\omega_{s-\varrho+\beta}; v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u) = 0, \\ G_\beta(v_{s-\varrho+\beta}; v_1, \ldots, v_{s-\varrho}; u) = 0. \end{cases} \quad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

Dabei sind die ω des ersten Systems durch die Gleichungen (ω.) definirt. Nun soll sich aus den 2ϱ Gleichungen (FG.) gerade eine Gleichung bilden lassen der Gestalt:

$$(\Psi.) \qquad \Psi(\omega_{s-\varrho+1}, \ldots, \omega_s; v_1, \ldots, v_s; u) = 0,$$

so dass durch Einführung der ω aus (ω.) die linke Seite von selbst unabhängig wird von den u. Geben wir diesen daher constante Werthe:

$$u = u^0,$$

so ergiebt sich als Differentialgleichung zwischen den v diese:

$$\Psi(\omega^0_{s-\varrho+1}, \ldots, \omega^0_s; v_1, \ldots, v_s) = 0,$$

wobei

$$(\omega^0.) \qquad \omega^0_{s-\varrho+\beta} = v'_{s-\varrho+\beta} - \frac{\partial f^0_\beta}{\partial x} - \Sigma \frac{\partial f^0_\beta}{\partial v_a} \cdot v'_a$$

wird. f^0_β bedeutet natürlich das, was aus f_β wird, wenn an Stelle der u die u^0 eingeführt werden. Die Form der rechten Seite in (ω^0.) zeigt, dass die ω^0 vollständige Differentiale sind. Es wird mithin:

$$\omega^0_{s-\varrho+\beta} = \frac{d}{dx} h_\beta(v_1, \ldots, v_s) \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

und daher ist die gewünschte Form der Differentialgleichung, welche zwischen den v besteht folgende:

$$(X.) \qquad X(v_1, \ldots, v_s; \frac{d}{dx} h_1(v_1, \ldots, v_s), \ldots, \frac{d}{dx} h_\varrho(v_1, \ldots, v_s)) = 0.$$

Wir wollen dieser Gleichung noch eine etwas übersichtlichere Gestalt geben.

An Stelle der s Unbestimmten v führen wir s neue ein durch die Gleichungen:

$$(h.) \qquad w_a = h_a(v_1, \ldots, v_s). \qquad (a = 1, \ldots, s)$$

Von den Functionen der rechten Seite sind

$$h_1, \quad \ldots, \quad h_\varrho$$

die Functionen, welche in der letzten Gleichung (X.) vorkommen,

$$h_{\varrho+1}, \quad \ldots, \quad h_s$$

sind dagegen irgend welche andere Functionen, welche nur so gewählt sein sollen, dass die Determinante:

$$\left| \frac{\partial h_a}{\partial v_\beta} \right| \qquad (a, \beta = 1, \ldots, s)$$

.

nicht identisch verschwindet. Solche Functionen $h_{\varrho+1}, \ldots, h_s$ würden sich zu den $h_1, \ldots, h_\varrho$ nur dann nicht finden lassen, wenn etwa alle Determinanten ϱter Ordnung der Matrix

$$\left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial v_\beta}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, \varrho \\ \beta = 1, \ldots, s\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden würden. Dies ist aber ausgeschlossen, da sonst die Gleichung (*X.*) nur eine geringere Anzahl als ϱ Differentialquotienten enthalten würde. Die s Grössen w_α sind also von einander „verschieden" im Sinne unserer Definition 5 und die Determinante:

$$\left|\frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\beta}\right| \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, s)$$

ist nicht identisch Null. Die Gleichungen (h.) lassen sich also auch nach $v_1, \ldots, v_s$ auflösen, so dass man erhält:

$$\text{(k.)} \qquad v_\alpha = k_\alpha(w_1, \ldots, w_s)_0.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (*X.*) ein, so geht diese über in eine Gleichung für die w und w':

$$G(w_1, \ldots, w_s; w'_1, \ldots, w'_\varrho) = 0;$$

dabei kann ϱ einen der Werthe;

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad s-1$$

haben. Wir können daher annehmen, dass die Gleichung (*X.*) die Form hat:

$$\text{(G.)} \qquad G(w_1, \ldots, w_s; w'_1, \ldots, w'_{s-1}) = 0,$$

indem wir, falls $\varrho < s-1$ ist, zulassen, dass in (G.) einige der w' nicht vorkommen. Führt man die w durch die Transformation (h.) auch in (f.) ein, so geht dieses System über in eine Transformation λter Ordnung der u in die w:

$$\text{(g.)} \qquad w_\alpha = g_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda,$$

wobei diese g_α mit den vorher gelegentlich benutzten g_α nichts zu thun haben sollen.

Hiermit haben wir nun den Satz gewonnen:

***Satz* 4.** „Wenn aus der Transformation:

$$\text{(f.)} \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

der r unabhängigen Unbestimmten u in die $s \leqq r$ neuen v keine Gleichung 0ter Ordnung, eine und nur eine Gleichung 1ter Ordnung zwischen den v

folgt, aber keine neue höherer Ordnung, so lassen sich an Stelle der v durch die Gleichungen:

$$(h.) \qquad w_\alpha = h_\alpha(v_1, \ldots, v_s)_0, \quad \left|\frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\beta}\right| \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, s)$$

s neue, verschiedene Unbestimmte w einführen, so dass die Tranformation (f.) der u in die v übergeht in eine solche der u in die w:

$$(g.) \qquad w_\alpha = g_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda,$$

welche so beschaffen ist, dass die zwischen den w bestehende Differentialgleichung 1ter Ordnung die Form hat:

$$(G.) \qquad G(w_1, \ldots, w_s; w'_1, \ldots, w'_{s-1}) = 0,$$

also mindestens eines der w nur in der 0ten Ordnung enthält."

Hiermit ist die Form der *Differentialgleichung* zwischen den v festgestellt. Es erübrigt also noch, von dieser auf die Gestalt der *Transformationsgleichungen* (f.) selbst zu schliessen. Denken wir uns zu dem Zwecke die Gleichung (G.) nach w_s aufgelöst, so wird:

$$(w.) \qquad w_s = g(w_1, \ldots, w_{s-1})_1 = \overset{1}{w}.$$

Löst man andererseits die Gleichungen (h.) nach den v auf, so kommt:

$$(k.) \qquad v_\alpha = k_\alpha(w_1, \ldots, w_s) \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

oder nach Einführung des Werthes für $w_s = \overset{1}{w}$ aus (w.)

$$(\mathfrak{f}.) \qquad v_\alpha = \mathfrak{f}_\alpha(w_1, \ldots, w_{s-1}; \overset{1}{w}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

wobei $\overset{1}{w}$ eben eine Differentialfunction 1ter Ordnung der $w_1, \ldots, w_{s-1}$ bedeuten soll, welche durch

$$(w.) \qquad \overset{1}{w} = g(w_1, \ldots, w_{s-1})_1$$

definirt ist. Die w sind laut (g.) Differentialfunctionen endlicher Ordnung der u, durch deren Einführung demnach (f.) übergeht in (f.); d. h. die v lassen sich als Differentialfunctionen erster Ordnung von $s-1$ Unbestimmten

$$w_1, \ldots, w_{s-1}$$

darstellen in der Weise (f.). Die $s-1$ Unbestimmten w sind aber nicht nur „verschieden", sondern auch unabhängig im Sinne der Definition 5. Denn sonst würde nach (k.) neben (G.) noch eine andere Differentialgleichung zwischen den v folgen gegen die Voraussetzung. Aus demselben Grunde können

in (f.) nicht alle Determinanten $(s-1)(\mu_0+1)$-ter*) Ordnung der Matrix:

$$M_{\mu_0} = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial w_1^{(\beta)}}, \ldots, \frac{\partial v_\alpha}{\partial w_{s-1}^{(\beta)}}, \frac{\partial v_\alpha}{\partial \overset{1}{\underset{\smile}{w}}} \right) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, s \\ \beta = 0, \ldots, \mu_0 \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Die Transformation (f.) gehört also dem „allgemeinen" Falle im Sinne der Definition 4 an. Mithin haben wir das Ergebniss:

***Satz* 5.** „Gehört die Transformation

$$\text{(f.)} \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

der r unabhängigen Unbestimmten u in s neue v nicht dem allgemeinen Falle an, sondern folgt aus ihr genau *eine* Differentialgleichung 1ter Ordnung zwischen den v, aber weiter auch nichts, so lassen sich diese als Differentialfunctionen 1ter Ordnung von $s-1$ unabhängigen Unbestimmten in der Form darstellen:

$$\text{(f.)} \qquad v_\alpha = \mathfrak{f}_\alpha(w_1, \ldots, w_{s-1}; \overset{1}{\underset{\smile}{w}})_0.$$

Dabei gehört jetzt die Transformation (f.) dem „allgemeinen" Falle an, die w sind Differentialfunctionen $(\lambda-1)$-ter Ordnung der u:

$$\text{(g.)} \qquad w_\alpha = g_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda-1} \qquad (\alpha = 1, \ldots, s-1)$$

und $\overset{1}{\underset{\smile}{w}}$ ist eine Differentialfunction erster Ordnung von $w_1, \ldots, w_{s-1}$:

$$\text{(w.)} \qquad \overset{1}{\underset{\smile}{w}} = g(w_1, \ldots, w_{s-1})_1.\text{"}$$

8. Wir haben bisher bei der Transformation (f.) nur die Möglichkeit $s \leqq r$ ins Auge gefasst. Es wird sich herausstellen, dass unser eben ausgesprochener ***Satz* 5** wörtlich Geltung behält, auch wenn $s > r$ ist. Deshalb ist auch bei seiner Fassung schon proleptisch die Bedingung $s \leqq r$ unterdrückt worden. Ist nämlich $s > r$, so folgen laut ***Satz* 1** sicher Differentialgleichungen zwischen den v. Es ist also nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass dieses System sich gerade auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung reducirt. Deshalb muss erstens $r = s-1$ sein, zweitens die Transformation sich auf eine solche erster Ordnung und gerade von der Form (f.) reduciren, da sonst immer noch mehr Differentialgleichungen oder solche höherer Ordnung bestehen würden.

---

*) Wir unterlassen es von jetzt ab, den betreffenden Werth μ_0 nach No. 5 auszurechnen. Derselbe ist uns völlig gleichgültig.

9. Es hat keine Schwierigkeit, die Gestalt der Transformationsgleichungen:

$$(f.) \qquad v_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (a = 1, \ldots, s)$$

auch in dem Falle anzugeben, wenn aus ihnen *mehrere* Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den v folgen sollten. Die Entwicklungen der No. 7 liefern alles hierzu nöthige Material, und wir haben uns dort lediglich deshalb erst auf den Fall *einer* Differentialgleichung eingelassen, um die Uebersicht möglichst wenig zu erschweren. Es handelt sich also nur noch um die Benutzung der Entwicklungen von No. 7 für den Fall, dass aus (f.) mehr als eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den v folgt, aber keine 0ter und keine neue höherer Ordnung.

Ist beispielsweise die Zahl jener Differentialgleichungen 2, so müssen aus den 2ϱ Gleichungen (FG.) der No. 7 sich statt einer zwei Gleichungen der Form ($\Psi.$) bilden lassen, welche bei Einführung der ω aus ($\omega.$) von den u ganz unabhängig werden. Aus diesen zwei Gleichungen kann einmal ω_s, das andere Mal ω_{s-1} eliminirt und deshalb die Form derselben gleich so angenommen werden:

$$(\psi_1.) \qquad \psi_1(\omega_{s-\varrho+1}, \ldots, \omega_{s-2}, \omega_{s-1}; v_1, \ldots, v_s; u) = 0,$$
$$(\psi_2.) \qquad \psi_2(\omega_{s-\varrho+1}, \ldots, \omega_{s-2}, \omega_s; v_1, \ldots, v_s; u) = 0.$$

Durch Specialisirung der u folgen daher als Differentialgleichungen zwischen den v diese zwei der Form:

$$(\chi.) \qquad \begin{aligned} &\chi_1\left(v_1, \ldots, v_s; \frac{dh_1(v)}{dx}, \ldots, \frac{dh_{\varrho-2}(v)}{dx}, \frac{dh_{\varrho-1}(v)}{dx}\right) = 0, \\ &\chi_2\left(v_1, \ldots, v_s; \frac{dh_1(v)}{dx}, \ldots, \frac{dh_{\varrho-2}(v)}{dx}, \frac{dh_{\varrho}(v)}{dx}\right) = 0, \end{aligned}$$

welche in ihrer übersichtlicheren Gestalt (G.) lauten:

$$(G_1.) \qquad G_1(w_1, \ldots, w_s; w'_1, \ldots, w'_{s-3}, w'_{s-2}) = 0,$$
$$(G_2.) \qquad G_2(w_1, \ldots, w_s; w'_1, \ldots, w'_{s-3}, w'_{s-1}) = 0,$$

wobei wieder nicht alle der w' vorzukommen brauchen. Eliminirt man aus diesen Gleichungen w_s, so ergiebt sich eine Differentialgleichung zwischen $w_1, \ldots, w_{s-1}$:

$$(H.) \qquad H(w_1, \ldots, w_{s-1})_1 = 0.$$

Diese muss offenbar zu einer Identität werden, wenn man durch die Gleichungen (g.):

$$(g.) \qquad w_a = g_a(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (a = 1, \ldots, s-1$$

die u an Stelle der w einführt. Die Transformation (g.) der r Unbestimmten u in die $s-1$ neuen w hat also eine und nur eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den w zur Folge, aber keine 0ter und keine neue höherer Ordnung. Für sie treffen also die Voraussetzungen des Satzes 5 zu, nur dass hier w an Stelle von v steht und die Zahl $s-1$ durch $s-2$ ersetzt ist. Die $w_1, \ldots, w_{s-1}$ lassen sich also als Differentialfunctionen von $s-2$ Unbestimmten $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{s-2}$ darstellen, welche selbst wieder Differentialfunctionen endlicher Ordnung der u sind. Da aber nach den Gleichungen (f.) der No. 7 die v selbst Differentialfunctionen von $w_1, \ldots, w_{s-1}$ waren, so stellen sich die v als Differentialfunctionen endlicher Ordnung von $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{s-2}$, also von $s-2$ unabhängigen Unbestimmten dar. Unabhängig sind diese deshalb, weil sonst zwischen den v eine grössere Zahl von Differentialgleichungen folgen würde als vorgeschrieben ist. Aus dem gleichen Grunde gehört die Darstellung der v durch die w auch dem allgemeinen Falle an. Wir haben also den Satz:

Satz 6. „Wenn aus den Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r), \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

sich gerade 2 Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den v ergeben, weiter aber keine Gleichungen, so lassen sich die v als Differentialfunctionen endlicher Ordnung von $s-2$ unabhängigen Unbestimmten darstellen, welche selbst wieder Differentialfunctionen der u sind. Die neue Darstellung gehört dem allgemeinen Falle an."

Bei der Ausprache dieses Satzes sind wir der Uebersicht halber jetzt nicht mehr auf die Form der fraglichen Gleichungssysteme eingegangen, obwohl dieselbe durch die voranstehenden Betrachtungen vollständig entwickelt werden kann. Es durfte dies um so eher geschehen, als die betreffenden Formen bei den Anwendungen, welche in dieser Arbeit von den Sätzen gemacht werden sollen, keine Rolle spielen. Für die Theorie der Transformation durch Differentialfunctionen selbst sind sie natürlich von der grössten Bedeutung. Wir hoffen diese wichtige Disciplin, welche auch Anwendungen auf andere Gebiete der Mathematik gestattet, bei späterer Gelegenheit ausführlicher zu behandeln, und werden dann auf die hier entwickelten Resultate genauer zurückkommen.

Wie von dem Satze 5 auf den Satz 6, so gelangt man durch Induction zu dem allgemeinen:

***Satz* 7.** „Wenn aus den Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

durch Differentiationen und Eliminationen der u sich gerade $\varrho < s$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die v ergeben, aber keine 0ter und keine neue höherer Ordnung, so lassen sich die v als Differentialfunctionen endlicher Ordnung von nur $s-\varrho$ unabhängigen Unbestimmten darstellen, welche selbst wieder Differentialfunctionen endlicher Ordnung der u sind. Die neue Darstellung erfüllt die Bedingungen des allgemeinen Falles der Definition 4."

10. Wir haben nun noch einige Worte darüber zu sagen, wie sich die obigen Sätze, im besonderen der allgemeine Satz 7 modificiren, wenn zwischen den v Differentialgleichungen höherer Ordnung bestehen. Folgt aus (f.) beispielsweise gerade 1 Gleichung 2ter Ordnung zwischen den v:

$$(G.) \qquad G(v_1, \ldots, v_s; v_1', \ldots, v_s'; v_1^{(2)}, \ldots, v_s^{(2)})_0 = 0,$$

so setzen wir:

$$v_1' = v_{11}, \quad v_2' = v_{21}, \quad \ldots, \quad v_s' = v_{s1}.$$

Dann bilden diese s Gleichungen zusammen mit der folgenden:

$$G(v_1, \ldots, v_s; v_{11}, \ldots, v_{s1}; v_{11}', \ldots, v_{s1}')_0 = 0$$

ein System (G_1.) von $s+1$ Differentialgleichungen erster Ordnung, welches der einen Gleichung (G.) vollständig äquivalent ist. Dieses System (G_1.) muss aus den Transformationsgleichungen:

$$(f_1.) \qquad \begin{cases} v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda, \\ v_{\alpha 1} = \dfrac{d}{dx} f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_\lambda = f_{\alpha 1}(u_1, \ldots, u_r)_{\lambda+1}, \end{cases}$$

welche den Gleichungen (f.) vollständig äquivalent sind, durch Differentiation und Elimination der u folgen. Die Gleichungen (f_1.) definiren aber eine Transformation der r Unbestimmten $u_1, \ldots, u_r$ in $2s$ neue v; aus ihnen sollen $\varrho = s+1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $2s$ Grössen v folgen; es lassen sich also diese und im besonderen auch $v_1, \ldots, v_s$ nach Satz 7 als Differentialfunctionen endlicher Ordnung von $2s-(s+1) = s-1$ unabhängigen Unbestimmten darstellen, welche selbst wieder Differentialfunctionen endlicher Ordnung der u sind. Mithin bleibt der Satz 7 ungeändert, wenn eine oder mehrere der auftretenden Differentialgleichungen zwischen den v zweiter statt erster Ordnung sind. Ganz dasselbe gilt auch dann, wenn die Ordnung der Gleichungen höher wird als

die zweite. Ebenso erkennt man sofort aus den zu Anfang der No. 7 angestellten Ueberlegungen, dass ein Auftreten von Differentialgleichungen 0ter Ordnung die Gültigkeit unseres letzten Satzes 7 nicht beeinträchtigt. Wir können also endlich allgemein den Satz aussprechen:

Satz 8. „Wenn aus den Gleichungen:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)' \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

durch Differentiation und Elimination der u sich gerade $\varrho < s$ verschiedene Differentialgleichungen 0ter, 1ter oder höherer Ordnung zwischen den v ergeben, so stellen sich die v als Differentialfunctionen endlicher Ordnung von $s-\varrho$ unabhängigen Unbestimmten w dar:

$$(f.) \qquad v_\alpha = \mathfrak{f}_\alpha(w_1, \ldots, w_{s-\varrho})', \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

welche selbst wieder Differentialfunctionen endlicher Ordnung der u sind:

$$(g.) \qquad w_\alpha = g_\alpha(u_1, \ldots, u_r)'. \qquad (\alpha = 1, \ldots, s-\varrho)$$

Die Transformation in der Form (f.) gehört dem „allgemeinen" Fall der Definition 4 an; d. h. es verschwinden nicht alle Determinanten $(s-\varrho)$-ter Ordnung der Matrix:

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial w_\beta^{(\gamma)}}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, s \\ \beta = 1, \ldots, s-\varrho \\ \gamma = 0, \ldots, \mu_\beta\end{pmatrix}$$

identisch."

Hiermit ist gezeigt, dass, wenn für eine Transformation (f.) der allgemeine Fall nicht vorliegt, sie durch Einführung einer geringeren Anzahl von Unbestimmten w an Stelle der u — wie es durch die Gleichungen (g.) geschieht — auf diesen Fall reducirt werden kann. Oder:

Satz 8ª. „Sind in s Gleichungen (f.) die r Unbestimmten u in ihrer Minimalzahl vorhanden, d. h. lassen sie sich nicht in der Weise (g.) durch eine geringere Anzahl von Unbestimmten ersetzen, so haben wir den allgemeinen Fall der Definition 4 vor uns, und sämmtliche Sätze 1—8 dieses Abschnittes haben Gültigkeit."

11. Wenn zwischen r Unbestimmten u eine Differentialgleichung besteht:

$$(G.) \qquad G(u_1, \ldots, u_r)_\nu = 0$$

und die r Grössen u durch eine Transformation:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

von allgemeiner Form in r neue Unbestimmte v übergeführt werden, so

geht die Gleichung (G.) in eine Differentialgleichung zwischen den v über:

$$H(v_1, \ldots, v_r)' = 0.$$

Zum Beweise haben wir nur zu zeigen, dass aus den Gleichungen (f.) und (G.) und den aus ihnen durch Differentiation abgeleiteten sich sämmtliche u eliminiren lassen, sobald man die Differentiation weit genug treibt. Es seien daher die Gleichungen (f.) μmal, wo $\mu > \nu - \lambda$, die Gleichung (G.) $(\lambda+\mu-\nu)$-mal differentiirt, so dass die u in beiden Systemen nur bis zur $(\lambda+\mu)$-ten Ordnung auftreten. Dann kommen in den $r(\mu+1)$ Gleichungen:

$$(\text{f.}), \quad (\text{f}'.), \quad \ldots, \quad (\text{f}^{(\mu)}.)$$

welche aus (f.) durch Differentiation hervorgegangen sind,

$$r(\mu+1)$$

Grössen v vor und

$$r(\lambda+\mu+1)$$

Grössen u. Zwischen diesen letzteren bestehen aber $\lambda+\mu-\nu+1$ Gleichungen:

$$(\text{G.}), \quad (\text{G}'.), \quad \ldots, \quad (\text{G}^{(\lambda+\mu-\nu)}.),$$

welche aus (G.) durch Differentiation hervorgegangen sind. Es bleiben also von den u nur noch

$$r(\lambda+\mu+1)-(\lambda+\mu-r+1)$$

unabhängige Veränderliche. Es ist jetzt zu zeigen, dass μ immer so gross gewählt werden kann, dass die Anzahl der v grösser wird als die der unabhängigen Veränderlichen u; d. h. dass:

$$r(\mu+1) > r(\lambda+\mu+1)-(\lambda+\mu-\nu+1)$$

wird. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass die Differenz

$$r\lambda-(\lambda+\mu-\nu+1)$$

negativ wird. Dies geschieht aber immer, wenn

$$\mu > r\lambda-(\lambda-\nu+1)$$

gewählt wird.

Hiermit ist unsere anfangs aufgestellte Behauptung erwiesen. Sie lässt sich natürlich auch auf ein System von Gleichungen (G.) ausdehnen, und es gilt daher der Satz:

Satz 9. „Bestehen zwischen r Unbestimmten u ϱ unabhängige Differentialgleichungen irgend einer Ordnung:

$$(\text{G.}) \qquad G_\alpha(u_1, \ldots, u_r)' = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varrho)$$

so gehen diese durch eine Transformation von allgemeiner Form:

$$(f.) \qquad v_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)' \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

wieder in ϱ unabhängige Differentialgleichungen zwischen den v über:

$$(H.) \qquad H(v_1, \ldots, v_r)' = 0.\text{“}$$

III.

Anwendung des Vorigen auf Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Wir wenden uns jetzt zur Lösung unseres im ersten Abschnitte aufgestellten Problems:

Problem. „Alle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(H.) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1, \ldots, \eta_s)$$

anzugeben von folgender Beschaffenheit: Es sei H eine bestimmte Function seiner Argumente, dagegen $\eta_1, \ldots, \eta_s$ unbestimmte, unabhängige Functionen von x, und es soll eine feste Function Ω seiner Argumente existiren, so dass die Gleichung

$$\Omega(x,\ y;\ u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.},$$

wo die u unbestimmte Functionen von x bedeuten, welche jedoch nicht unabhängig zu sein brauchen, die Integralgleichung der Differentialgleichung (H.) ist. Aendert man die Functionen η der Differentialgleichung, so sollen sich in der Integralgleichung nur die Functionen u ändern, dagegen soll Ω dieselbe Function seiner Argumente bleiben. Die Integralgleichung Ω soll zur Differentialgleichung jede beliebige der Form H, aber nur solche dieser Form besitzen können.“

Als Beispiele für solche Differentialgleichungen haben wir im ersten Abschnitte die drei Gleichungen aufgeführt:

$$(1'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0,$$

$$(2'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0 + \eta_1 . y,$$

$$(3'.) \qquad \frac{dy}{dx} = \eta_0 + \eta_1 . y + \eta_2 . y^2,$$

deren Integralgleichungen bezw.

$$(1.) \qquad y + u_0 = \text{Const.},$$

$$(2.) \qquad u_1 . y + u_0 = \text{Const.},$$

$$(3.) \qquad \frac{u_1 . y + u_0}{u_3 . y + u_2} = \text{Const.}$$

waren. Werden die in einer dieser Gleichungen vorkommenden unbestimmten Functionen von x, d. h. die η, bezw. u auf ihre geringste Zahl reducirt gedacht, so beobachten wir folgende, den drei Fällen gemeinsame Eigenschaften:

a) Nicht nur die unbestimmten Functionen η der Differentialgleichung (r'.), sondern auch die unbestimmten Functionen u der Integralgleichung (r.) sind von einander unabhängig; d. h. durch keine Differentialgleichung verbunden ($r = 1, 2, 3$).

b) Die Anzahl der unabhängigen, unbestimmten Functionen der Differentialgleichung (r'.) ist genau so gross wie die der unabhängigen unbestimmten Functionen der Integralgleichung (r.), nämlich gleich r (r = 1, 2, 3).

c) Nicht nur in der Differentialgleichung (r'.), sondern auch in der Integralgleichung (r.) kommt die Variable x explicite nicht vor, sondern nur in den unbestimmten Functionen η, bezw. u.

d) Setzt man an Stelle des einen Werthes x der Veränderlichen x einen anderen $\bar{x}$ und bezeichnet den zugehörigen Werth der Variabeln y mit $\bar{y}$, die zugehörigen Werthe der u mit $\bar{u}$, so geht die Integralgleichung (r.) bezw. für $r = 1, 2, 3$ über in:

$$\bar{y}+\bar{u}_0 = y+u_0,$$

$$\bar{u}_1.\bar{y}+\bar{u}_0 = u_1.y+u_0,$$

$$\frac{\bar{u}_1.\bar{y}+\bar{u}_0}{\bar{u}_3.\bar{y}+\bar{u}_2} = \frac{u_1.y+u_0}{u_3.y+u_2}.$$

Löst man diese Gleichungen nach $\bar{y}$ auf, so erhält man:

$$(1^a.) \qquad \bar{y} = y+v_0,$$

$$(2^a.) \qquad \bar{y} = v_1.y+v_0,$$

$$(3^a.) \qquad \bar{y} = \frac{v_1.y+v_0}{v_3.y+v_2},$$

wo die v Functionen der u und $\bar{u}$ sind. Im Falle (r^a.) kommen also die $2r$ Unbestimmten:

$$u_0, \quad \ldots, u_{r-1}; \quad \bar{u}_0, \quad \ldots, \quad \bar{u}_{r-1}$$

nur in r Verbindungen vor:

$$v_0, \quad \ldots, \quad v_{r-1}.$$

Uebrigens ist die rechte Seite der Gleichung (r^a.) genau dieselbe Function von y, wie die linke Seite der Gleichung (r.).

e) Betrachtet man die Gleichung (r^a.) als eine Transformation der Variabeln y in die neue $\bar{y}$ mit den r Parametern v, so bildet die Schaar aller ∞^r Gleichungen (r^a.) eine r-gliedrige, continuirliche Gruppe*).

Wir werden nun einfach zeigen, dass alle Differentialgleichungen und Integralgleichungen, welche den Anforderungen unseres Problems Genüge leisten, sich in solche Typen zusammenfassen lassen, welche sich genau der eben angeführten Eigenschaften a) bis e) erfreuen. Haben wir somit erkannt, dass auch die Eigenschaft e) aus den Voraussetzungen unseres Problems folgt, so ist unsere Arbeit beendet und das in der Einleitung und im ersten Abschnitte angeführte Resultat erwiesen; denn *Lie* hat im 16. Bande der Mathematischen Annalen (1880. Theorie der Transformationsgruppen I. Satz 3, 4, 5) alle continuirlichen Gruppen der Geraden und der Ebene bestimmt**) und im besonderen gefunden, dass die Gruppen der Transformation einer Variabeln, d. h. die Gruppen der Geraden sich sämmtlich vermittelst einer Substitution der Form:

$$y_1 = \varphi(y), \quad \bar{y}_1 = \varphi(\bar{y})$$

auf die Typen (1^a.), (2^a.), (3^a.) reduciren, d. h. dass die Gleichung der allgemeinsten endlichen continuirlichen Transformationsgruppe einer Veränderlichen die Gestalt hat:

$$\varphi(\bar{y}) = \varphi\left(\frac{v_1 y + v_0}{v_3 y + v_2}\right),$$

wobei φ irgend eine Function bedeutet. Ist daher wirklich die Eigenschaft e) auch im allgemeinen als vorhanden nachgewiesen, so ist zugleich das im ersten Abschnitte erwähnte Ergebniss gewonnen, dass die einzigen Differentialgleichungen, welche den Anforderungen unseres Problems Genüge leisten, die Typen (1′.), (2′.), (3′.) sind und diejenigen, welche sich aus ihnen ergeben durch eine Substitution der Form:

$$y_1 = \varphi(y),$$

in welcher φ eine beliebige Function bedeutet, dass mithin die Differential-

*) Im Sinne *Lie*s. Transformationsgruppen I, Einleitung.

**) Man vergleiche auch in dem neuerdings erschienenen Werke: „*Sophus Lie,* Vorlesungen über continuirliche Gruppen, bearbeitet und herausgegeben von *Scheffers*, Leipzig 1893“, die „Abtheilung III, die Gruppen der Ebene“ sowie im besondern den § 4 im Kapitel 12, Theorem 27. Ferner beachte man „*Lie,* Theorie der Transformationsgruppen III, bearbeitet unter Mitwirkung von *Engel,* Abth. I. Leipzig 1893.

gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta_0 + \eta_1 \cdot \varphi(y) + \eta_2 \cdot \varphi(y)^2}{\varphi'(y)}$$

als der *allgemeinste,* alle übrigen umfassende Typus von Differentialgleichungen angesehen werden kann, welche für unbestimmte Coefficienten eine Integralgleichung besitzen.

Es handelt sich also nur noch um die Discussion der Eigenschaften a) bis e).

2. *Die Eigenschaft* a). Von der Integralgleichung:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x,\ y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r) = \text{Const.}$$

und der zugehörigen Differentialgleichung:

$$(\text{H.}) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_s)$$

setzen wir von jetzt an ein für alle Mal voraus, dass die u sowohl als die η in ihrer Minimalzahl vorhanden sind, d. h. dass es nicht möglich ist, die u bezw. n durch eine geringere Anzahl von Verbindungen zu ersetzen, welche Functionen der u bezw. η sind. Wenn wir ferner in dem ersten Abschnitte die Möglichkeit offen gelassen haben, dass die u der Integralgleichung unter sich durch Differentialgleichungen verbunden sind, so ist jedenfalls vorauszusetzen, dass aus jenem Differentialgleichungssysteme (Σ), welches zwischen den u besteht, sich keine einzige Gleichung 0ter Ordnung ergiebt, da ja sonst vermittelst dieser eines der u sich als Function der übrigen bestimmen und so aus der Gleichung ($\Omega.$) ganz herausschaffen liesse.

Wir werden nach diesen Bemerkungen der Eigenschaft a) entsprechend nachweisen:

Satz a. „Wenn die η der Differentialgleichung (H.) von einander unabhängige, unbestimmte Functionen von x sind, so sind auch die u der Integralgleichung von einander unabhängige, unbestimmte Functionen von x."

Zum Beweise gehen wir zunächst von irgend einer Integralgleichung ($\Omega.$) aus, deren Unbestimmte u durch keine Differentialgleichung verbunden sind, und bestimmen die zu ($\Omega.$) gehörige Differentialgleichung (H.).

Die Integralgleichung sei:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x,\ y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r) = \text{Const.},$$

die u seien also zunächst unabhängige unbestimmte Functionen von x, die in ($\Omega.$) wirklich in r verschiedenen Verbindungen auftreten. Die zugehörige

Differentialgleichung wird:

$$(\Omega'.) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial x} + \sum_1^r{}_a \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_a} u'_a}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}}.$$

Die rechte Seite ist eine Function von x, y, den u und u'. Diese u und u' möge die rechte Seite gerade in s und nicht weniger „verschiedenen" Verbindungen enthalten:

$$(\text{f.}) \qquad \eta_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_1, \qquad (a = 1, 2, \ldots, s)$$

so dass s nicht grösser als $2r$ ist. Wir behaupten zunächst, dass r der η auch von einander „unabhängig", d. h. durch keine Differentialgleichung irgend einer Ordnung verbunden sind. Wären nämlich je r der η durch eine Differentialgleichung verbunden, so würden aus der Transformation (f.) sich mehr als $s-r$ Differentialgleichungen zwischen den η ergeben. Die Transformation (f.) würde also nicht dem allgemeinen Falle des zweiten Abschnittes angehören (Satz 1), mithin müssten sich die u durch eine geringere Anzahl unabhängiger Unbestimmten ersetzen lassen (Satz 8); sie würden also in der Integralgleichung (Ω.) nicht in ihrer Minimalzahl vorhanden sein gegen Voraussetzung. Wir haben mithin

$$r \leqq s \leqq 2r$$

und die Transformation (f.) hat die „allgemeine" Form im Sinne der Definition 4 des zweiten Abschnittes. Daher sind r der η, etwa:

$$\eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_r$$

von einander unabhängige Unbestimmte,

$$\eta_{r+1}, \quad \ldots, \quad \eta_s$$

aber durch je eine, also im ganzen $s-r$ Differentialgleichungen, jedoch höherer als 0ter Ordnung, mit den $\eta_1, \ldots, \eta_r$ verbunden. Wir sehen also:

Satz 10. „Sind $u_1, \ldots, u_r$ unabhängige unbestimmte Functionen von x, so sind in der zur Integralgleichung:

$$\Omega(x, y; u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.}$$

zugehörigen Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y; \eta_1, \ldots, \eta_s)$$

die η dann und nur dann ebenfalls alle unabhängig, wenn $s = r$ ist."

Ist also $s = r$, so kann der Fall, dass zwischen den u Differentialgleichungen bestehen, für die Lösung unserer Aufgabe gar nicht in Frage kommen. Denn schon dann, wenn die u unabhängig sind, erfüllt die Integralgleichung (Ω.) die Anforderungen unseres Problems, eine veritable Integralgleichung von (H.) zu sein, was auch die η für Functionen von x sein mögen. Alle brauchbaren Integralgleichungen aber, welche aus der allgemeinen (Ω.) durch Relationen zwischen den u etwa hervorgehen könnten, sind in dem allgemeinen Typus (Ω.), dessen u unabhängig sind, schon enthalten.

Ist dagegen $s > r$ und sind die Unbestimmten u der Integralgleichung nicht von einander unabhängig, sondern durch Differentialgleichungen verbunden, so werden diese Differentialgleichungen vermöge der Transformation:

$$\text{(f.)} \qquad \eta_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_1 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

Differentialgleichungen zwischen $\eta_1, \ldots, \eta_r$ zur Folge haben (Satz 9). Dazu kämen noch die $s-r$ Differentialgleichungen, durch welche $\eta_{r+1}, \ldots, \eta_s$ an $\eta_1, \ldots, \eta_r$ gebunden sind (Satz 1). Es würde also niemals, welchen Werth auch s haben möge, durch eine Integralgleichung (Ω.), deren u nicht unabhängig sind, eine Differentialgleichung (H.) construirt werden können, deren η wieder unabhängig sind. Hierdurch scheint also unser Satz a. auch im allgemeinen schon bewiesen, insofern ja die η den Voraussetzungen unseres Problems zufolge unabhängige Unbestimmte sein sollen, und demnach die Annahme, dass die u der Integralgleichung nicht unabhängig sind, den eben gemachten Ausführungen entsprechend unzulässig wäre.

Indessen ist dieser Beweis in Wirklichkeit noch nicht erbracht. Es könnte sich ja ereignen, dass die $s-r$ Differentialgleichungen, welche für $s > r$ immer zwischen den $\eta_1, \ldots, \eta_s$ bestehen, zusammen mit den Differentialgleichungen, welche zwischen $\eta_1, \ldots, \eta_r$ aus den zwischen den u bestehenden Differentialgleichungen folgen, gerade in ein System von lauter Gleichungen 0ter Ordnung für die η übergingen. Wäre dies aber der Fall, so könnte man eine gewisse Anzahl der η aus dem Gleichungssysteme als Functionen der übrigen η berechnen und diese Ausdrücke in die Differentialgleichung (H.) einführen. Diese würde dann nur noch unabhängige η enthalten und also den Anforderungen unseres Problems entsprechen, während ihre Integralgleichung im Widerspruch mit dem Satze a. Unbestimmte u enthielte, welche nicht von einander unabhängig wären. Es ist also noch zu zeigen, dass die Differentialgleichungen zwischen den η, welche zufolge

des Systems ($\Sigma.$) von Differentialgleichungen zwischen den u sich ergeben, nicht auf lauter Gleichungen 0ter Ordnung sich reduciren können.

Alle Gleichungen 0ter Ordnung nämlich, welche aus dem System:

$$\text{(f.)} \qquad \eta_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_1 \qquad (a = 1, \ldots, s;\ s > r)$$

folgen, gehen durch Elimination der u, u' aus diesen hervor. Von den u, u' sind aber nur so viele unabhängige Veränderliche, als es das System ($\Sigma.$) der Differentialgleichungen zwischen den u gestattet. Es sei

$$(\Sigma.) \qquad G_\gamma(u_1, \ldots, u_r)' = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots)$$

dieses System. Dann haben wir nach den zu Anfang dieser Nummer gemachten Ausführungen zunächst anzunehmen, dass aus dem Systeme ($\Sigma.$) keine einzige Gleichung 0ter Ordnung zwischen den u folgt. Alle Gleichungen 0ter Ordnung aber, welche zwischen den η bestehen, ergeben sich durch Elimination der u, u' aus den Systemen (f.) und ($\Sigma.$). Ist eine der Gleichungen ($\Sigma.$) zweiter oder höherer Ordnung in den u, so bleiben für diese alle u, u' unabhängige Veränderliche. Alle Gleichungen 0ter Ordnung zwischen den η, welche aus (f.) durch Elimination der u, u' folgen, werden daher schon dann erhalten, wenn jene Gleichungen zweiter oder höherer Ordnung zwischen den u in dem Systeme ($\Sigma.$) gar nicht vorhanden sind. Da aber zwischen den η überhaupt nur Gleichungen 0ter Ordnung folgen sollen, so können wir alle Differentialgleichungen zweiter oder höherer Ordnung, welche in dem Systeme ($\Sigma.$) enthalten sind, fortlassen, ohne dass die Relationen zwischen den η geändert würden. Es sei

$$\text{(G.)} \qquad G_\gamma(u_1, \ldots, u_r)_1 = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, \varrho)$$

jenes System, welches aus ($\Sigma.$) durch Weglassen aller Gleichungen höherer als erster Ordnung entsteht. Dann sind sämmtliche ϱ Gleichungen des Systems (G.) genau erster Ordnung und es folgt aus ihnen keine 0ter Ordnung. Wir ersetzen jetzt wirklich das System ($\Sigma.$) durch (G.). Vermöge dieser Gleichungen bleiben $r-\varrho$ der u unabhängige Unbestimmte, die ϱ übrigen u sind an jene durch das System (G.) gebunden. Daher bleiben auch von den $\eta_1, \ldots, \eta_r$, welche aus den u durch die Transformation:

$$\eta_a = f_a(u_1, \ldots, u_r)_1 \qquad (a = 1, \ldots, r)$$

hervorgehen, gerade $r-\varrho$ der η unabhängige Unbestimmte, während die übrigen ϱ der $\eta_1, \ldots, \eta_r$ mit jenen $r-\varrho$ durch je eine Differentialgleichung verbunden sind (Satz 9). Jede dieser ϱ Differentialgleichungen zwischen

$$\eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_r$$

sowohl als die $s-r$ übrigen zwischen:

$$\eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_r; \quad \eta_{r+1}, \quad \ldots, \quad \eta_s$$

soll sich nun auf eine solche 0ter Ordnung reduciren, welche durch Elimination der u, u' aus den Systemen (f.), (G.) erhalten wird. Wir führen die Elimination in der Weise aus, dass wir die ϱ Gleichungen (G.) nach ϱ der u', welche mit:

$$u'_{r-\varrho+1}, \quad \ldots, \quad u'_r$$

bezeichnet seien, auflösen, diese als Functionen von:

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_r; \quad u'_1, \quad \ldots, \quad u'_{r-\varrho}$$

bestimmen und die erhaltenen Ausdrücke in (f.) einsetzen. Es möge dabei werden:

$$\text{(g.)} \qquad u'_{r-\varrho+\beta} = g_\beta(u_1, \ldots, u_r; u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho})_0 \qquad (\beta = 1, \ldots, \varrho)$$

und die η mögen durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (f.) übergehen in:

$$\text{(h.)} \qquad \begin{cases} \eta_\alpha = \zeta_\alpha = h_\alpha(u_1, \ldots, u_r; u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho})_0 & (\alpha = 1, \ldots, s) \\ \quad = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r; u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho}; g_1, \ldots, g_\varrho)_0. \end{cases}$$

Da aus je $r-\varrho+1$ dieser Gleichungen sich die Variabeln $u_1, \ldots, u_r$; $u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho}$ eliminiren lassen sollen, so müssen alle Determinanten $(r-\varrho+1)$-ter Ordnung der Matrix:

$$\left(\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial u_r}, \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial u'_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial u'_{r-\varrho}}\right) \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$$

identisch verschwinden. Mit anderen Worten, es lassen sich solche Grössen $\overset{0}{A}_{\beta\gamma}$, $\overset{1}{A}_{\beta\gamma}$ bestimmen, welche Functionen der $u_1, \ldots, u_r; u'_1, \ldots, u'_{r-\varrho}$ sind, so dass das System von r linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \sum_1^{r-\varrho}{}_\gamma \overset{0}{A}_{\beta\gamma} \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_\gamma} + \overset{0}{A}_{\beta,\, r-\varrho+\beta} \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_{r-\varrho+\beta}} = 0, & (\beta = 1, \ldots, \varrho) \\ \sum_1^{r-\varrho}{}_\gamma \overset{1}{A}_{\beta\gamma} \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_\gamma} + \overset{1}{A}_{\beta,\, r+\beta} \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial u'_\beta} = 0 & (\beta = 1, \ldots, r-\varrho) \end{cases}$$

für die s Ausdrücke:

$$\zeta = \zeta_1, \quad \ldots, \quad \zeta = \zeta_s$$

identisch erfüllt wird.

Nun besteht aber, wenn wie früher η die allgemeinen Werthe der η bedeuten, wie sie durch die Transformation:

$$\text{(f.)} \qquad \eta_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_1$$

bei ***unabhängigen*** u definirt werden, zwischen diesen allgemeinen η und den speciellen, aus ihnen durch die Substitutionen (g.) hervorgegangenen ζ nach (h.) folgende Beziehung. Es ist, wenn ζ typisch eines der ζ, η das entsprechende der η bedeutet, identisch:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u_\gamma} = \frac{\partial \eta}{\partial u_\gamma} + \sum_1^\varrho{}_\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial u'_{r-\varrho+\varepsilon}} \cdot \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial u_\gamma}. \qquad (\gamma = 1, \ldots, r)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obigen r partiellen Differentialgleichungen ein, so folgt, dass die η einem Systeme von folgender Form genügen:

$$\begin{cases} \sum_1^{r-\varrho}{}_\gamma \overset{0}{B}_{\beta\gamma} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u_\gamma} + \sum_1^\varrho{}_\varepsilon \overset{0}{B}_{\beta, r-\varrho+\varepsilon} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u'_{r-\varrho+\varepsilon}} + \overset{0}{B}_{\beta, r+\beta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u_{r-\varrho+\beta}} = 0, & (\beta = 1, \ldots, \varrho) \\ \sum_1^{r-\varrho}{}_\gamma \overset{1}{B}_{\beta\gamma} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u_\gamma} + \sum_1^\varrho{}_\varepsilon \overset{1}{B}_{\beta, r-\varrho+\varepsilon} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u'_{r-\varrho+\varepsilon}} + \overset{1}{B}_{\beta, r+\beta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial u'_\beta} = 0. & (\beta = 1, \ldots, r-\varrho) \end{cases}$$

Dabei zeigt die einfache Ausrechnung, wie die B sich aus den A zusammensetzen. Sie sind wieder Functionen der u und u', beispielsweise wird:

$$\overset{0}{B}_{\beta, r+\beta} = \overset{0}{A}_{\beta, r-\varrho+\beta}; \quad \overset{1}{B}_{\beta, r+\beta} = \overset{1}{A}_{\beta, r+\beta}.$$

Hieraus geht hervor, dass die obigen r Gleichungen zwischen den η von einander unabhängig sind. Da sie aber nur $2r$ Variable enthalten, nämlich:

$$u_1, \ \ldots, \ u_r; \quad u'_1, \ \ldots, \ u'_r,$$

so besitzen sie höchstens r verschiedene gemeinsame Lösungen, während alle übrigen Lösungen des Systems gewöhnliche Functionen jener r sind. Nun hat aber das fragliche System jede der $s > r$ Grössen:

$$\eta_1, \ \ldots, \ \eta_s$$

zu Integralen. Also können von diesen nur r von einander „verschieden“ sein im Sinne der Definition 5 etwa $\eta_1, \ldots, \eta_r$, jedes der übrigen $\eta_{r+1}, \ldots, \eta_s$ ist eine gewöhnliche Function der $\eta_1, \ldots, \eta_s$. Mithin würden schon zwischen den ***allgemeinen*** η Gleichungen 0ter Ordnung bestehen. Dies ist aber absurd. Folglich ist unsere Annahme falsch, dass vermöge des Systems (Σ.) von Differentialgleichungen zwischen den u alle zwischen den η sich ergebenden Gleichungen von der 0ten Ordnung werden.

Wir haben also den Satz a. erwiesen.

3. Gleichzeitig haben uns die soeben gemachten Erfahrungen gelehrt, dass, wenn die u der Integralgleichung unabhängig sind, ihre Zahl r gleich der Zahl s der Unbestimmten η der Differentialgleichung ist. Mit-

hin ist auch die Eigenschaft b) erwiesen, es gilt also der

Satz b. „Genügt die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y; \eta_1, \ldots, \eta_s)$$

den Anforderungen unseres Problems, so hat die Integralgleichung die Form:

$$\Omega(x, y; u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.},$$

und es ist $r = s$ und die u sind unabhängig."

In dem Ansatze unseres Problems haben wir naturgemäss die rechte Seite der Differentialgleichung von x explicite frei, also die Gleichung in der Form angenommen:

$$(\text{H.}) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y; \eta_1, \ldots, \eta_r).$$

Wir wollen zeigen, dass auch die Integralgleichung von x explicite frei, also in der Form angenommen werden kann:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(y; u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.}$$

Ist nämlich

$$(\Omega.) \qquad \Omega(x, y; u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.}$$

die Gestalt der Integralgleichung und:

$$\frac{dy}{dx} = H(y; \eta_1, \ldots, \eta_r)$$

die zugehörige Differentialgleichung, so führen wir die Substitution aus:

$$x = \varphi(x_1),$$

wodurch die u und η in neue unabhängige, unbestimmte Functionen von x_1 übergehen:

$$\begin{cases} u_1(x) = v_1(x_1), & \ldots, \quad u_r(x) = v_r(x_1), \\ \eta_1(x) = \zeta_1(x_1), & \ldots, \quad \eta_r(x) = \zeta_r(x_1). \end{cases}$$

Dann wird:

$$(\Omega_1.) \qquad \Omega(\varphi(x_1), y; v_1, \ldots, v_r) = \text{Const.},$$

$$(\text{H}_1.) \qquad \frac{dy}{dx_1} = \varphi'(x_1).H(y; \zeta_1, \ldots, \zeta_r).$$

Denken wir uns jetzt unter φ eine *unbestimmte* Function, so enthält Ω_1 die Variable x_1 nicht mehr explicite, sondern nur in $r+1$ unbestimmten Functionen von x_1:

$$v_1 = v_1(x_1), \quad \ldots, \quad v_r = v_r(x_1), \quad v_{r+1} = \varphi(x_1)$$

und (H_1.) enthält x_1 nur in den $r+1$ unbestimmten Functionen:

$$\zeta_1 = \zeta_1(x_1), \quad \ldots, \quad \zeta_r = \zeta_r(x_1), \quad \zeta_{r+1} = \varphi'(x_1).$$

Da nun φ, also auch φ' eine unbestimmte, willkürlich wählbare Function von x_1 ist, so kann sie weder mit $v_1, \ldots, v_r$ noch mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ durch irgend eine Differentialgleichung verbunden sein, und da $v_1, \ldots, v_r$ einerseits, $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ andrerseits auch unter sich unabhängig sind, so sind sowohl die $r+1$ Unbestimmten der Integralgleichung (Ω_1.):

$$v_1, \quad \ldots, \quad v_{r+1}$$

als die $r+1$ Unbestimmten der Differentialgleichung (H_1.) unabhängige, unbestimmte Functionen von x_1. Wir haben also als Bestätigung der Eigenschaft c) den Satz:

Satz c. „Alle Gleichungen, welche unserem Problem Genüge leisten, lassen sich in solche Typen zusammenfassen, bei welchen nicht nur die Differentialgleichung, sondern auch die Integralgleichung die Variable x nicht anders als in den unbestimmten Functionen enthält."

Von jetzt ist also:

$$(\Omega.) \qquad \Omega(y;\ u_1, \ldots, u_r) = \text{Const.}$$

mit unabhängigen u die Integralgleichung,

$$(H.) \qquad \frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1, \ldots, \eta_r)$$

mit unabhängigen η die Differentialgleichung, welche unseren Betrachtungen zu Grunde liegt, und:

$$(\eta.) \qquad \begin{cases} \eta_\alpha = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r)_1 \\ \quad\ = f_\alpha(u_1, \ldots, u_r;\ u_1', \ldots, u_r')_0 \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

das System von allgemeiner Form, durch welches die u und η mit einander verbunden sind.

5. *Die Eigenschaft* d). Um jetzt zum Beweise der Eigenschaft d) zu gelangen, ersetzen wir die Variable x durch $\bar{x}$ und bezeichnen die zugehörigen Werthe von y, den u und den η mit $\bar{y}$, $\bar{u}$, $\bar{\eta}$. Dann wird

$$(\bar{H}.) \qquad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = H(\bar{y};\ \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_r)$$

die Differentialgleichung. Integriren wir diese unter den Anfangsbedingungen,

dass für $\bar{x} = x$, $\bar{y}$ den constanten Werth y annimmt, so wird

$$(\bar{\Omega}.) \qquad \Omega(\bar{y};\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r) = \Omega(y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r)$$

die Integralgleichung. Diese möge nach $\bar{y}$ aufgelöst lauten:

$$(\bar{g}.) \qquad \bar{y} = g(y;\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r;\ u_1,\ \ldots,\ u_r).$$

Wir behaupten nun, dass die rechte Seite der Gleichung $(\bar{g}.)$ die $2r$ Grössen $\bar{u}$ und u nur in r von y freien Verbindungen enthält:

$$\bar{v}_1, \quad \ldots, \quad \bar{v}_r.$$

Die $\bar{u}$ und $\bar{\eta}$ hängen nämlich durch das System zusammen:

$$(\bar{f}.) \qquad \bar{\eta}_\alpha = f_\alpha(\bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r;\ \bar{u}'_1,\ \ldots,\ \bar{u}'_r). \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

Wählt man die $\bar{\eta}$ als bestimmte Functionen von x, so definirt das Differentialgleichungssystem $(\bar{f}.)$ die zugehörigen Functionen $\bar{u}$. Da dieses aber erster Ordnung in jedem der u ist, so bleiben die Anfangswerthe $u_1, \ldots, u_r$ willkürliche Constanten. Diese können in dem allgemeinen Integral $\bar{y}$ mit der Integrationsconstante y aber nur formal enthalten sein, da es eben nur *eine* willkürliche Constante enthalten kann. Mithin erhalten wir aus $(\bar{g}.)$ schon dann das allgemeine Integral $\bar{y}$, wenn wir die Constanten $u_1, \ldots, u_r$ irgend wie passend specialisiren:

$$u_1 = a_1, \quad \ldots, \quad u_r = a_r,$$

wo die a numerische Werthe bedeuten, so dass

$$\bar{y} = g(y;\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r;\ a_1,\ \ldots,\ a_r) = g(y;\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r)$$

das allgemeine Integral wird. Natürlich sind dabei die $\bar{u}$ frei von y. Dies gilt alles, sobald die Functionen $\bar{\eta}$ fest gewählt und dadurch auch die $\bar{u}$ in der letzten Gleichung praeter propter bestimmt sind. Wählen wir die $\bar{\eta}$ irgend wie anders, so werden dieselben Ueberlegungen statt haben, die Function g der letzten Gleichung bleibt dieselbe, nur die $\bar{u}$ ändern ihre Abhängigkeit von $\bar{x}$. Wir erhalten daher die Gesammtheit aller Integrale, die sich ergeben, wenn wir die $\bar{\eta}$ in $(\bar{H}.)$ oder die $\bar{u}$ in $(\bar{\Omega}.)$ gleich allen möglichen Functionen von $\bar{x}$ setzen, schon dann, wenn wir in:

$$\bar{y} = g(y;\ \bar{v}_1,\ \ldots,\ \bar{v}_r)$$

die $\bar{v}$ gleich allen möglichen Functionen von $\bar{x}$ setzen. Dabei ist y die

Integrationsconstante, und $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r$ sind von dieser frei. Es ist ausserdem klar, dass die $\bar{v}$ nicht in noch weniger als r Verbindungen in g enthalten sein können. Nun war nach $(\bar{g}.)$ die Form unseres Integrals auch diese:

$$\bar{y} = g(y; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r)$$

für unbestimmte, unabhängige Functionen u. Es gilt also die Identität:

$$g(y; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r) = g(y; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r)$$

für beliebige unabhängige Variable:

$$y, \quad \bar{u}, \quad u.$$

Aus ihr bestimmen sich die $\bar{v}$ als von y freie Functionen der $\bar{u}$ und u:

$$\bar{v}_a = \varphi_a(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r). \qquad (a = 1, \ldots, r)$$

Wir haben also den

Satz d. „Löst man die Gleichung:

$$(\bar{\Omega}.) \qquad \Omega(\bar{y}; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r) = \Omega(y; u_1, \ldots, u_r)$$

nach $\bar{y}$ auf:

$$\bar{y} = g(y; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r),$$

so kommen die $\bar{u}$ und u rechts nur in r unabhängigen Verbindungen vor:

$$(\bar{\varphi}.) \qquad \bar{v}_a = \varphi_a(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r; u_1, \ldots, u_r),$$

so dass

$$(g.) \qquad \bar{y} = g(y; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r)$$

die allgemeine Integralgleichung wird. Die Gleichungen $(\bar{\varphi}.)$ lassen sich nach $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ und ebenso nach $u_1, \ldots, u_r$ auflösen, so dass jedes der drei Systeme:

$$\begin{array}{llll} u_1, & \ldots, & u_r; & \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r, \\ \bar{u}_1, & \ldots, & \bar{u}_r; & \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r, \\ \bar{v}_1, & \ldots, & \bar{v}_r; & u_1, \ldots, u_r \end{array}$$

als ein System von $2r$ unabhängigen Variablen angesehen werden kann, während die jedesmal übrig bleibenden r Grössen

$$\begin{array}{lll} \bar{v}_1, & \ldots, & \bar{v}_r, \\ u_1, & \ldots, & u_r, \\ \bar{u}_1, & \ldots, & \bar{u}_r \end{array}$$

die abhängigen Veränderlichen werden.“

6. ***Die Eigenschaft*** e). Aus den Betrachtungen der letzten Nummer lässt sich sofort die Haupteigenschaft ableiten, dass die Transformationen

$$(\bar{g}.) \qquad \bar{y} = g(y;\ \bar{v}_1,\ \ldots,\ \bar{v}_r)$$

eine r-gliedrige Gruppe bilden, wenn man y, $\bar{y}$ als Veränderliche, $\bar{v}_1,\ \ldots,\ \bar{v}_r$ als Parameter ansieht.

Führt man nämlich auf $\bar{y}$ eine neue Transformation der Form $(\bar{g}.)$ aus mit irgend welchen anderen Parametern $\bar{\bar{v}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{v}}_r$, so kommt:

$$(\bar{\bar{g}}.) \qquad \bar{\bar{y}} = g(\bar{y};\ \bar{\bar{v}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{v}}_r).$$

Bestimmt man nun aber aus den r Gleichungen:

$$(\bar{\varphi}.) \qquad \bar{v}_a = \varphi_a(\bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r;\ u_1,\ \ldots,\ u_r)$$

nach willkürlicher, aber allgemeiner Wahl der r Grössen u die r Grössen $\bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r$, was nach unserem oben bewiesenen Satze d. stets möglich ist, so lässt sich die Gleichung $(\bar{g}.)$ nach demselben Satze d. in die Form setzen:

$$(\bar{\Omega}.) \qquad \Omega(\bar{y};\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r) = \Omega(y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r).$$

Berechnet man hierauf aus den r Gleichungen:

$$\bar{\bar{v}}_a = \varphi_a(\bar{\bar{u}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{u}}_r;\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r)$$

die r Grössen $\bar{\bar{u}}$, so lässt sich der Gleichung $(\bar{\bar{g}}.)$ die Form geben:

$$(\bar{\bar{\Omega}}.) \qquad \Omega(\bar{\bar{y}};\ \bar{\bar{u}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{u}}_r) = \Omega(\bar{y};\ \bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_r).$$

Aus den Gleichungen $(\bar{\Omega}.)$, $(\bar{\bar{\Omega}}.)$ folgt aber sofort durch Elimination der einmal überstrichenen Grössen:

$$\Omega(\bar{\bar{y}};\ \bar{\bar{u}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{u}}_r) = \Omega(y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r)$$

oder auch:

$$(g.) \qquad \bar{\bar{y}} = g(y;\ w_1,\ \ldots,\ w_r),$$

wenn nämlich die w durch die Gleichungen definirt sind:

$$w_a = \varphi_a(\bar{\bar{u}}_1,\ \ldots,\ \bar{\bar{u}}_r;\ u_1,\ \ldots,\ u_r).$$

Es ist also die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen der Schaar $(\bar{g}.)$, etwa $(\bar{g}.)$ und $(\bar{\bar{g}}.)$, wieder eine Transformation der Schaar,

nämlich (g.). Hiermit ist aber die Gruppeneigenschaft bewiesen und somit nach unseren früheren Bemerkungen die Arbeit beendet. Es gilt der

Satz e. „Betrachtet man die durch Satz d. definirte Gleichung:

$$(\bar{g}.) \qquad \bar{y} = g(y;\ \bar{v}_1,\ \ldots,\ \bar{v}_r)$$

als eine Transformation der einen Veränderlichen y in die neue $\bar{y}$ mit den r Parametern $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r$, so bildet die Schaar aller dieser ∞^r Transformationen, welche sich aus $(\bar{g}.)$ durch Variation der Parameter $\bar{v}$ ergiebt, eine r-gliedrige continuirliche Gruppe und

$$g(y;\ u_1,\ \ldots,\ u_r) = \text{Const.}$$

ist eine Integralgleichung der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = H(y;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_r)$$

für Coefficienten η, welche unbestimmte, unabhängige Functionen von x sind."

Als der Verfasser die obige Arbeit bereits vollendet hatte, gelangten die Untersuchungen von *Vessiot*, *Guldberg* und *Lie* zu seiner Kenntniss, welche sich auf Differentialgleichungen mit Fundamentalintegralen beziehen*). *Lie*s Arbeit ist die allgemeinste; sie umfasst und berichtigt die Untersuchungen seiner Vorgänger. Ein Vergleich des von uns erhaltenen Resultates mit dem *Lie*schen ergiebt, dass die dort erörterte Klasse der Differentialgleichungen, welche Fundamentalintegrale besitzen, mit der von uns behandelten Klasse identisch ist, sobald unsere Voraussetzung festgehalten wird, dass die Integration für unabhängige, unbestimmte Coefficienten geleistet werden soll. Dies ist bemerkenswerth; denn die Identität beider Klassen ist nicht a priori klar, weil wir bei unserer Problemstellung auch zuliessen, dass die unbestimmten Functionen der Integralgleichung unter sich durch Differentialgleichungen verbunden sind.

Weitere Ausführungen, Verallgemeinerungen und Anwendungen dieser kurzen Andeutungen hoffen wir demnächst folgen lassen zu können.

---

*) ***Vessiot,*** Comptes Rendus 1893, pag. 427, 959, 1112. — ***Guldberg,*** Comptes Rendus 1893, pag. 964. — ***Lie,*** über Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen, Leipziger Berichte 1893, pag, 341. Die letzte Arbeit hat ***Scheffers*** reproducirt in: ***Sophus Lie,*** Vorlesungen über continuirliche Gruppen, herausgegeben von ***Scheffers.*** Leipzig 1893. Kapitel 24, § 4. (Man vergleiche auch ***Drach,*** C. R. 1893, pag. 1041.)

Ueber die Zerlegung ganzer, ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren.

(Von Herrn *Max Mandl* in Prossnitz.)

1.

Ein allgemeines Kriterium für den irreductibeln Charakter einer beliebigen ganzen, ganzzahligen Function und zugleich eine Methode, jede ganze, ganzzahlige Function in ihre irreductibeln Factoren zu zerlegen, wurde bekanntlich zuerst von *L. Kronecker* („Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen", dieses Journal Band 92, S. 11) gegeben und bald darauf von Hrn. *Runge* (dieses Journal Bd. 99) soweit ausgebildet, dass es zur factischen Ausführung von Factorenzerlegungen bereits geeignet erscheint. Gleichwohl erfordert selbst diese vereinfachte Methode einen sehr beträchtlichen Rechnungsaufwand und hat überdies das Missliche, dass sie aus einer Reihe mehr oder minder discreter, nur wenig zusammenhängender Operationen besteht. Es soll nun im Folgenden eine von der *Kronecker*schen wesentlich verschiedene Methode entwickelt werden, welche aus einer zusammenhängenden Kette von Operationen besteht und dabei in der Anwendung einfacher ist als das bisher bekannte Verfahren. Auf die Kreistheilungsgleichung

$$\frac{x^{p^\mu}-1}{x^{p^{\mu-1}}-1} = 0$$

angewendet, reducirt sich die Methode auf den *Eisenstein*schen *Irreductibilitätsbeweis*.

Wir beweisen zunächst den folgenden Hülfssatz:

Jede ganze Function $f(x)$ lässt sich durch eine Substitution $x = y+h$ in eine Function $F(y)$ von solcher Beschaffenheit transformiren, dass nicht nur $F(y)$ selbst, sondern auch alle reellen Factoren von $F(y)$ durchweg positive Coefficienten haben.

Denkt man sich nämlich $f(x)$ in seine linearen Factoren aufgelöst und bezeichnet mit γ irgend eine reelle, ferner mit $\alpha+\beta i$ irgend eine complexe Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, so ist auch $\alpha-\beta i$ eine Wurzel dieser Gleichung, und man hat

$$f(x) = \Pi(x-\gamma).\Pi\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.$$

Wendet man nun auf $f(x)$ die Substitution $x=y+h$ an, und soll die neue Function

$$F(y) = \Pi(y+h-\gamma).\Pi\{(y+h-\alpha)^2+\beta^2\}$$

sammt allen ihren reellen Factoren nur lauter positive Coefficienten aufweisen, so braucht man für h bloss eine positive Zahl zu wählen, welche nicht kleiner ist als jede positive Zahl in der Reihe der α- und γ-Grössen. h ist somit die *obere Grenze für die positiven reellen Bestandtheile der Wurzeln* von $f(x)=0$.

Versteht man unter h eine ganze Zahl, so sind $f(x)$ und $F(y)$ gleichzeitig ganzzahlige Functionen, und jedem irreductibeln Factor der einen entspricht ein irreductibler Factor der anderen. Man kann daher statt $f(x)$ auch $F(y)$ der Betrachtung zu Grunde legen.

Es sei also

$$F(y) = c_0+c_1y+c_2y^2+\cdots+c_ny^n$$

eine Function von der erörterten Eigenschaft, und nehmen wir an, dieselbe sei in die rationalen Factoren

$$\Phi(y) = a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_\nu y^\nu$$

und

$$\Psi(y) = b_0+b_1y+b_2y^2+\cdots+b_{n-\nu}y^{n-\nu}$$

zerlegbar, dann sind zunächst sämmtliche Coefficienten a, b, c positiv. Ausserdem aber bestehen zwischen diesen Coefficienten Relationen von der Form:

$$\text{(I.)} \qquad c_r = \sum_{k=0}^{k=r} a_k b_{r-k}\ ^*). \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Die Aufgabe der Zerlegung von $F(y)$ in zwei rationale Factoren ist somit identisch mit der Aufgabe, zwei Systeme von positiven, ganzen Zahlen $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots;\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ zu finden, welche dem Gleichungssysteme (I.) Genüge leisten.

Um das System (I.) in diesem Sinne aufzulösen, schreiben wir es zuvörderst in folgender Form:

---

*) Dabei ist $a_k=0$, $b_l=0$, wenn $k>\nu$, $l>n-\nu$. Auch kann man r alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegen, wenn man festsetzt, dass $c_r=0$, sobald $r<0$ oder $r>n$.

$$c_0 = a_0 b_0,$$
$$c_r = \sum_{k=1}^{k=r-1} a_k . b_{r-k} + a_0 b_r + a_r b_0 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Setzt man ferner der Kürze halber

$$c_r - \sum_{k=1}^{k=r-1} a_k b_{r-k} = C_r,$$

so kann man das Gleichungssystem (I.) durch das folgende ersetzen:

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} a_0 b_0 = c_0, \\ a_0 b_r + a_r b_0 = C_r. \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Um dieses Gleichungssystem in positiven, ganzen Zahlen aufzulösen, bestimmt man zunächst a_0 und b_0 als zwei positive, ganze Zahlen, deren Product $= c_0$ ist. Hierauf findet man aus (II.) für $r = 1$ die Grössen a_1, b_1 mit Hilfe der Diophantischen Gleichung

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = C_1 = c_1.$$

Setzt man weiterhin $r = 2$, so hat man

$$a_0 b_2 + a_2 b_0 = C_2 = c_1 - a_1 b_1,$$

woraus sich a_2 und b_2 als positive, ganze Zahlen bestimmen lassen u. s. w.

Man findet so zu je zwei Zahlen a_0, b_0 ein oder mehrere Lösungspaare a_1, b_1, zu jedem Systeme $(a_0, b_0; a_1, b_1)$ ein oder mehrere Lösungspaare a_2, b_2 u. s. w. Je weiter man auf diesem Wege in der Rechnung fortfährt, desto mehr kann die Zahl der Systeme $(a_0, b_0; a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots, a_{r-1}, b_{r-1})$ wachsen; indessen können im Verlaufe der Rechnung eine kleinere oder grössere Zahl dieser Systeme dadurch in Wegfall kommen, dass die denselben entsprechende Gleichung $a_0 b_r + a_r b_0 = C_r$ gar keine positiven, ganzzahligen Lösungen besitzt.

Auf diese Weise findet man sämmtliche Zerlegungen von $F(y)$ in zwei rationale Factoren, und $F(y)$ wird dann irreductibel sein, wenn sich ausser der selbstverständlichen Zerlegung

$$F(y) = 1.(c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_n y^n)$$

keine weitere mehr auffinden lässt.

Es soll nun ein allgemeiner Ausdruck für a_r und b_r aufgestellt werden.

Damit die Gleichung (II.) in Bezug auf a_r und b_r überhaupt in positiven, ganzen Zahlen auflösbar sei, muss

$$C_r = c_r - \sum_{k=1}^{k=r-1} a_k b_{r-k}$$

positiv und durch den grössten gemeinsamen Factor von a_0 und b_0 theilbar sein; andernfalls kommt das betreffende System $(a_0, b_0; a_1, b_1; \ldots, a_{r-1}, b_{r-1})$

in Wegfall. Wir wollen auch annehmen, dass a_0 und b_0 relative Primzahlen sind, da jeder andere Fall offenbar auf diesen zurückführbar ist. Dann giebt es zwei positive, ganze Zahlen α, β (nämlich Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches von $\frac{a_0}{b_0}$), welche kleiner sind als a_0, bezw. b_0 und für welche

$$a_0\beta - b_0\alpha = \pm 1$$

ist. Nun ist es gleichgültig, welcher der beiden Factoren von c_0 mit a_0 und welcher mit b_0 bezeichnet wird; wir wählen daher a_0 und b_0 so, dass

$$a_0\beta - b_0\alpha = +1,$$

und haben dann

$$\text{(III.)} \qquad \begin{cases} a_r = -\alpha C_r + a_0 k, \\ b_r = \beta C_r - b_0 k, \end{cases}$$

wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die äussersten zulässigen Werthe von k sind:

$$k_{max} = \left[\frac{\beta C_r}{b_0}\right], \quad k_{min} = \left[\frac{\alpha C_r}{a_0}\right],$$

wobei unter der eckigen Klammer das bekannte Zeichen für *„grösste Ganze“* zu verstehen ist.

Setzt man nun

$$k = \left[\frac{\beta C_r}{b_0}\right] - g$$

und bezeichnet den Rest der Division von βC_r durch b_0 mit $R\left(\frac{\beta C_r}{b_0}\right)$, so findet man:

$$\text{(IV.)} \qquad \begin{cases} a_r = a_0\left[\frac{\beta C_r}{b_0}\right] - \alpha C_r - a_0 g = \frac{1}{b_0}\left\{C_r - a_0 R\left(\frac{\beta C_r}{b_0}\right)\right\} - a_0 g, \\ b_r = R\left(\frac{\beta C_r}{b_0}\right) + b_0 g, \end{cases}$$

wo jetzt g nur noch eine *positive*, ganze Zahl bedeuten kann, gerade so wie die übrigen vorkommenden Grössen a_0, b_0, a_r, b_r, α, β, C_r sämmtlich positiv sind.

Hätten wir $k = k_{min} + g'$ gesetzt, so wären wir zu folgenden Gleichungen gelangt:

$$\text{(V.)} \qquad \begin{cases} a_r = -R\left(\frac{\alpha C_r}{a_0}\right) + a_0 g', \\ b_r = \beta C_r - b_0\left[\frac{\alpha C_r}{a_0}\right] - b_0 g' = \frac{1}{a_0}\left\{C_r + b_0 R\left(\frac{\alpha C_r}{a_0}\right)\right\} - b_0 g'. \end{cases}$$

Wenn endlich a_0 und b_0 den gemeinsamen Theiler d haben und $a_0 = a_0' . d$, $b_0 = b_0' . d$, $C_r = C_r' . d$ ist, so sind an Stelle der Formeln (IV.) und (V.) ganz analoge zu setzen, in denen bloss a_0, b_0, C_r bezw. durch a_0', b_0', C_r' ersetzt sind.

II.

Bei der Durchführung der Rechnung in einem besonderen Falle handelt es sich vor allem um die Ermittelung einer oberen Grenze für die positiven, reellen Bestandtheile der Wurzeln von $f(x) = 0$. Für die numerische Berechnung ist es vortheilhaft, eine möglichst kleine Zahl als obere Grenze ausfindig zu machen. Der im Folgenden entwickelte Vorgang leistet hierbei gute Dienste.

Zuvörderst dürfen und wollen wir voraussetzen, dass die beiden ersten Coefficienten A_0, A_1 in

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n$$

gleiches, und zwar positives Vorzeichen haben, denn wären die Vorzeichen ungleich, so brauchte man nur $f(-x)$ statt $f(x)$ der Factorenzerlegung zu unterwerfen.

Es sei nun $x = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, deren reeller Bestandtheil $\varrho\cos\varphi$ positiv ist; dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$A_0\varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + A_1\varrho^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) + \cdots + A_n = 0$$

oder:

$$A_0\varrho^n + A_1\varrho^{n-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) + A_2\varrho^{n-2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) + \cdots + A_n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = 0,$$

demnach auch die Gleichung:

$$\text{(VI.)} \qquad A_0\varrho^n + A_1\varrho^{n-1}\cos\varphi + A_2\varrho^{n-2}\cos 2\varphi + \cdots + A_n\cos n\varphi = 0.$$

Da die beiden ersten Glieder der letzten Gleichung positiv sind, und da ferner die höheren Potenzen mit wachsendem Argumente rascher zunehmen als die niedrigeren, so wird $x = \varrho$ die gesuchte obere Grenze sein, wenn für diesen Werth des Arguments die beiden ersten Glieder in (VI.) zusammengenommen grösser sind, als die Summe der absoluten Werthe aller übrigen Glieder. Da aber der absolute Werth von $\cos\varphi$ völlig unbestimmt ist, so hat man für die obere Grenze die Bedingung zu erfüllen:

$$\text{(VII.)} \qquad M = A_0\varrho^n - |A_2|\varrho^{n-2} - |A_3|\varrho^{n-3} - \cdots - |A_n| \gtrless 0.$$

Mit Hülfe dieser Ungleichung wird sich ein Werth für ϱ ergeben, welcher

im allgemeinen kleiner ist als die obere Grenze für die *Moduln aller Wurzeln*, bei deren Aufsuchung man bekanntlich die Bedingung

$$M-|A_1|\varrho^{n-1} \gtreqless 0$$

zu erfüllen hat.

Der Werth für ϱ kann jedoch in manchen Fällen noch weiter herabgedrückt werden. Ist z. B. A_2 an und für sich negativ, so lehrt eine einfache Minimumbetrachtung, dass man der Summe M noch den kleineren der beiden Werthe $A_1\varrho^{n-1}$, $2|A_2|\varrho^{n-2}$ hinzufügen darf, oder, dass an Stelle der Bedingung (VII.) jetzt eine der beiden Ungleichungen

$$\text{(VIII.)} \qquad M+A_1\varrho^{n-1} \gtreqless 0 \quad \text{oder} \quad M+2|A_2|\varrho^{n-2} \gtreqless 0$$

gesetzt werden darf, und zwar diejenige, deren linke Seite kleiner ist.

Die erwähnte Minimumbetrachtung geht von der Summe des zweiten und dritten Gliedes auf der linken Seite von (VI.), nämlich von

$$U = A_1\varrho^{n-1}\cos\varphi - A_2'\varrho^{n-2}\cos 2\varphi \qquad (A_2' = |A_2|)$$

aus. Diese Summe wurde in M mit dem Werthe $-|A_2|$ in Rechnung gebracht, während unter den gegenwärtigen Umständen selbst der ungünstigste Werth von U noch immer grösser ist als $-|A_2|$.

Da

$$\frac{dU}{d\varphi} = \sin\varphi(-A_1\varrho^{n-1}+4A_2'\varrho^{n-2}\cos\varphi)$$

$$= 4A_2'\varrho^{n-2}\sin\varphi\left(\cos\varphi-\frac{A_1\varrho}{4A_2'}\right)$$

ist, so hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\frac{A_1\varrho}{4A_2'} < 1$, $= 1$ oder > 1 ist. Im ersten Falle hat U seine extremen Werthe für

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \pi \quad \text{und} \quad \varphi = \arccos\frac{A_1\varrho}{4A_2'},$$

wobei der letzte Werth zwischen 0 und $\pm\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Da nun $\cos\varphi \gtreqless 0$, so liegt $\varphi = \pi$ ausserhalb des in Betracht kommenden Intervalls für φ, und es ist statt dessen $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in Rechnung zu ziehen.

Die entsprechenden Werthe von φ und U sind:

$$\varphi = 0, \qquad U = A_1\varrho^{n-1} - A_2'\varrho^{n-2};$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad U = A_2'\varrho^{n-2};$$

$$\varphi = \arccos\frac{A_1\varrho}{4A_2'}, \quad U = \frac{A_1^2\varrho^n}{8A_2'} + A_2'\varrho^{n-2} > A_2'\varrho^{n-2}.$$

U kann somit keinesfalls kleiner werden als der kleinere der beiden Werthe

$$A_1\varrho^{n-1}-A_2'\varrho^{n-2} \quad \text{und} \quad A_2'\varrho^{n-2}.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn $\frac{A_1\varrho}{4A_2'} \gtreqless 1$ ist, als ungünstigster Werth

$$U = A_2'\varrho^{n-2}.$$

Man hat somit in allen drei Fällen den Werth von U in M kleiner in Rechnung gebracht, als selbst der kleinste Werth beträgt, den U anzunehmen im Stande ist, und zwar wird der Unterschied durch den kleineren der beiden Werthe

$$A_1\varrho^{n-1}, \quad 2A_2'\varrho^{n-2}$$

angegeben, womit die Bedingung (VIII.) gerechtfertigt erscheint.

In ähnlicher Weise lässt sich (VII.) durch günstigere Bedingungen ersetzen, wenn auch A_3, entweder für sich allein oder gleichzeitig mit A_2 negativ ist. In letzterem Falle z. B., wo $A_2 < 0$, $A_3 < 0$, findet man durch Betrachtung der Summe $A_1\varrho^{n-1}\cos\varphi - |A_2|\varrho^{n-2}\cos 2\varphi - |A_3|\varrho^{n-3}\cos 3\varphi$ für Werthe von φ zwischen 0 und $\pm\frac{\pi}{4}$, dann zwischen $\pm\frac{\pi}{4}$ und $\pm\frac{\pi}{2}$, dass man (VII.) durch eine der beiden folgenden Bedingungen ersetzen kann:

(IX.) $\qquad M+\sqrt{\tfrac{1}{2}}A_1\varrho^{n-1} \gtreqless 0 \quad$ oder $\quad M+|A_2|\varrho^{n-2}+|A_3|\varrho^{n-3} \gtreqless 0,$

wobei wieder diejenige Ungleichung massgebend ist, deren linke Seite den kleineren Werth hat; u. s. w.

III.

Die Brauchbarkeit der vorstehenden Methode soll nun an einem Beispiele gezeigt werden, und zwar wählen wir zu diesem Zwecke dieselbe Function, welche Herr ***Runge*** in der eingangs citirten Abhandlung auf anderem Wege in Factoren zerlegt hat. Die Function lautet:

$$f(x) = 3x^7+7x^6-10x^5-19x^4+172x^3+71x^2+17x-66,$$

worin der zweite Term bereits unserer Forderung entsprechend positiv ist.

Sucht man eine obere Grenze für die Moduln aller Wurzeln von $f(x)=0$, so findet man $\varrho = 5$; sucht man dagegen nur eine obere Grenze für die positiven reellen Bestandtheile, so braucht man nach Bedingung (VII.) nur bis $\varrho = 4$ zu gehen; macht man aber von dem Umstande Gebrauch, dass $A_2 = -10$ negativ ist, so genügt nach (VIII.) schon $\varrho = 3$.

Die Substitution $x = y+3$ ergiebt dann:

$$F(y) = 3y^7+70y^6+683y^5+3611y^4+11329y^3+21707y^2+24500y+12963.$$

Hier ist $c_0 = 12963 = 1.3.29.149$ auf vier verschiedene Arten in das Product zweier Zahlen zerlegbar, nämlich

1) $c_0 = 3.4321,$
2) $c_0 = 29.447,$
3) $c_0 = 149.87,$
4) $c_0 = 1.12963,$

und die Rechnung zerfällt daher in vier Theile. Die sich mit Hülfe der Formeln (IV.) ergebenden Zahlen sind nachstehend zusammengestellt, wobei von der folgenden Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht wird:

Wenn sich für a_1, b_1 mehrere, z. B. ν_1 verschiedene Werthsysteme ergeben, so sollen dieselben durch obere Indices von einander unterschieden werden, also:

$$a_1^{(1)},\quad b_1^{(1)};\quad a_1^{(2)},\quad b_1^{(2)};\quad \ldots,\quad a_1^{(\nu_1)},\quad b_1^{(\nu_1)}.$$

Findet man ferner für irgend eines dieser Systeme, etwa für $a_1^{(1)}$, $b_1^{(1)}$, mehrere z. B. ν_2 verschiedene Werthsysteme a_2, b_2, so sollen dieselben dadurch von einander unterschieden werden, dass man dem oberen Index einen zweiten variabeln Index hinzufügt, also:

$$a_1^{(11)},\quad b_1^{(11)};\quad a_1^{(12)},\quad b_1^{(12)};\quad \ldots,\quad a_1^{(1,\nu_2)},\quad b_1^{(1,\nu_2)}$$

u. s. w. Hiernach kann das System a_r, b_r im Ganzen mit r oberen Indices versehen sein.

Hier folgen die Zahlenwerthe, wie sie sich in den vier Rechnungsabschnitten ergeben:

1)
$$\begin{cases} a_0 = 4321, & b_0 = 3; & \\ \alpha = 1440, & \beta = 1; & C_1 = c_1 = 24500, \\ a_1^{(1)} = 5286, & b_1^{(1)} = 2; & C_2^{(1)} = 11135, \\ a_1^{(2)} = 965, & b_1^{(2)} = 5; & C_2^{(2)} = 16882, \\ a_2^{(1)} = 831, & b_2^{(1)} = 2; & C_3^{(1)} < 0, \\ a_2^{(2)} = 4187, & b_2^{(2)} = 1; & C_3^{(2)} < 0. \end{cases}$$

Da hier C_3 für beide in Betracht kommenden Werthsyteme der a und b negativ wird, so entspricht dem ersten Falle keine Factorenzerlegung von $F(y)$.

2)
$$\begin{cases} a_0 = 29, & b_0 = 447; & \\ \alpha = 12, & \beta = 185; & C_1 = 24500, \\ a_1^{(1)} = 31, & b_1^{(1)} = 367; & C_2^{(1)} = 10330, \\ a_1^{(2)} = 2, & b_1^{(2)} = 814; & C_2^{(2)} = 20079, \\ a_2^{(1)} = 15, & b_2^{(1)} = 125; & C_3^{(1)} = 1949, \\ a_2^{(21)} = 42, & b_2^{(21)} = 45; & C_3^{(21)} < 0, \\ a_2^{(22)} = 13, & b_2^{(22)} = 492; & C_3^{(22)} < 0. \end{cases}$$

Da hier $C_3^{(21)}$ und $C_3^{(22)}$ negativ sind, so kommen die entsprechenden Systeme der a und b nicht weiter in Betracht, und es bleibt nur das System $a_1^{(1)}$, $b_1^{(1)}$; $a_2^{(1)}$, $b_2^{(1)}$ übrig. Für dieses giebt es jedoch kein positives Werthsystem $a_3^{(1)}$, $b_3^{(1)}$, demnach liefert auch der zweite Fall keine Factorenzerlegung.

3)
$$\begin{cases} a_0 = 87, & b_0 = 149; \\ \alpha = 7, & \beta = 12; & C_1 = 24500, \\ a_1^{(1)} = 151, & b_1^{(1)} = 23; & C_2^{(1)} = 18234, \\ a_1^{(2)} = 64, & b_1^{(2)} = 172; & C_2^{(2)} = 10699, \\ a_2^{(1)} = 78, & b_2^{(1)} = 76; & C_3^{(1)} < 0, \text{ (das entspr. System fällt weg.)} \\ a_2^{(2)} = 14, & b_2^{(2)} = 99; & C_3^{(2)} = 2585, \\ a_3^{(2)} = 1, & b_3^{(2)} = 28; & C_4^{(2)} = 261, \\ a_4^{(2)} = 0, & b_4^{(2)} = 3; & C_5^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Aus $C_5 = 0$ folgt sofort, dass $a_5 = b_5 = 0$ ist. Ebenso ergiebt sich für alle folgenden a und b als einzige Lösung Null.

Der dritte Fall liefert somit das Werthsystem:

$$a_0 = 87, \quad a_1 = 64, \quad a_2 = 14, \quad a_3 = 1;$$
$$b_0 = 149, \quad b_1 = 172, \quad b_2 = 99, \quad b_3 = 28, \quad b_4 = 3.$$

4)
$$\begin{cases} a_0 = 1, & b_0 = 12963; \\ \alpha = 0, & \beta = 1; & C_1 = 24500, \\ a_1^{(1)} = 1, & b_1^{(1)} = 11537; & C_2^{(1)} = 10170, \\ a_1^{(2)} = 0, & b_1^{(2)} = 24500; & C_2^{(2)} = 21707, \\ a_2^{(1)} = 0, & b_2^{(1)} = 10170; & C_3^{(1)} = 11329, \\ a_2^{(21)} = 1, & b_2^{(21)} = 8744; & C_3^{(21)} = 2585, \\ a_2^{(22)} = 0, & b_2^{(22)} = 21707; & C_3^{(22)} = 11329, \\ a_3^{(1)} = 0, & b_3^{(1)} = 11329; & C_4^{(1)} < 0, \\ a_3^{(21)} = 0, & b_3^{(21)} = 2585; & C_4^{(21)} < 0, \\ a_3^{(22)} = 0, & b_3^{(22)} = 11329; & C_4^{(22)} = 3611, \\ a_4^{(22)} = 0, & b_4^{(22)} = 3611. \end{cases}$$

Es bleibt somit auch in diesem Falle nur ein einziges Werthsystem übrig, welches die selbstverständliche Zerlegung $F(y) = 1 . F(y)$ liefert; zugleich sieht man, dass die Rechnung nicht weiter fortgesetzt zu werden braucht, als bis sich $b_4 = c_4$ herausgestellt hat, denn wenn der eine Factor von $F(y)$ vom vierten Grade ist, so kann der andere höchstens vom dritten Grade sein, und es müssen daher alle folgenden a gleich Null, alle folgenden b gleich den entsprechenden Werthen der c sein.

Die einzige bemerkenswerthe Factorenzerlegung von $f(x)$ lautet daher:

$$f(x) = [87+64(x-3)+14(x-3)^2+(x-3)^3].[149+172(x-3)+99(x-3)^2 +28(x-3)^3+3(x-3)^4]$$
$$= (x^3+5x^2+7x-6)(3x^4-8x^3+9x^2+10x+11).$$

IV.

Setzt man $f(x)=\frac{x^{p^\mu}-1}{x^{p^{\mu-1}}-1}$, worin p eine Primzahl bedeutet, so ist nach Bedingung (VII.) $\varrho=1$ als obere Grenze ausreichend, und somit $F(y)=f(y+1)$. Nun sieht man leicht, dass $F(y)$ die Form haben muss:

$$F(y) = y^{p'}+py.F_1(y)+p,$$

worin $p'=p^{\mu-1}.(p-1)$ und $F_1(y)$ eine ganze, ganzzahlige Function des $(p'-2)$-ten Grades von y bedeutet. Man hat daher

$$c_0=p; \quad a_0=1, \quad b_0=p; \quad \alpha=0, \quad \beta=1$$

zu setzen, womit die Gleichungen (IV.) die Form annehmen:

$$\begin{cases} a_r = \left[\frac{C_r}{p}\right]-g, \\ b_r = R\left(\frac{C_r}{p}\right)+pg. \end{cases}$$

Da $C_1=c_1$ durch p theilbar ist, so ist $R\left(\frac{C_1}{p}\right)=0$, somit $b_1\equiv 0 \pmod{p}$. Hiernach wird aber auch

$$C_2 = c_2-a_1b_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

in Folge dessen $R\left(\frac{C_2}{p}\right)=0$. Aus demselben Grunde ist dann

$$C_3 = c_3-a_1b_2-a_2b_1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Schlussweise gilt soweit, als noch C_r durch p theilbar ist, also bis $C_{p'-1}$. Somit ist auch $b_{p'-1}$ durch p theilbar. Da aber nicht alle Coefficienten des einen Factors von $F(y)$ den gemeinsamen Factor p besitzen können, weil sonst auch $F(y)$ selbst diesen Factor haben müsste, so darf weder $b_{p'-1}$, noch irgend ein früheres b der letzte Coefficient des entsprechenden Factors sein; oder mit anderen Worten: der eine Factor von $F(y)$ kann nicht von niedrigerem als dem p'ten Grade sein, und da $F(y)$ selbst vom p'ten Grade ist, so ist $F(y)$, und damit auch $f(x)$ irreductibel.

Prossnitz in Mähren, December 1893.

Partialbruchzerlegungen in der Theorie der elliptischen Functionen.

(Von *Paul Günther.*)*)

1.

In Art. XX seiner Abhandlungen: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ hat *Kronecker* eine neue, höchst elegante Entwickelung der Function sinam$u$ gegeben und aus ihr zwei merkwürdige Formeln abgeleitet, von denen die erste

$$(\mathfrak{P}'') \qquad k = \sum_{\mu,\mu'} \frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{(2\mu'+1)K'+2\mu Ki}$$

den Modul des elliptischen Integrales erster Gattung durch die beiden Perioden $2K$ und $2K'i$ ausdrückt, während die zweite:

$$(\mathfrak{R}.) \qquad 1 = \sum_{\mu,\mu'} \frac{(-1)^{\mu'}}{(2\mu'+1)K'+2\mu Ki}$$

eine transcendente Relation zwischen den beiden Perioden liefert.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich diese *Kronecker*schen Formeln in einfacher Weise aus den *Partialbruchzerlegungen der elliptischen Functionen* ergeben. Dabei wird sich gleichzeitig herausstellen, dass sie nur die Anfangsglieder einer Reihe ähnlicher, ihnen durchaus gleichberechtigter Relationen sind, welche zwischen k, k', K und $K'i$ bestehen.

2.

Im Kapitel I des vierten Buches ihres Werkes: *Théorie des fonctions doublement périodiques* (Paris 1859) haben *Briot* und *Bouquet* Partialbruchzerlegungen für die Functionen λ, μ und ν abgeleitet, welche, in der *Jacobi*–

*) Die folgenden Bemerkungen hat mir mein allzufrüh dahingeschiedener Freund *Paul Günther* im Frühjahre 1890 mündlich mitgetheilt. Bei ihrer Redaction konnte ich ausserdem einige Notizen *Günther*s benutzen, welche mir Herr *A. Gutzmer* freundlichst zur Verfügung stellte. *Paul Stäckel.*

*Gudermann*schen Bezeichnung geschrieben, so lauten:

$$(1.) \qquad ksnu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i},$$

$$(2.) \qquad ikcnu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i},$$

$$(3.) \qquad idnu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i};$$

die Summation ist dabei in der Art zu vollziehen, dass das Zeichen Σ mit

$$\lim_{M=\infty}\lim_{M'=\infty}\sum_{\mu=-M}^{+M'}\sum_{\mu'=-M'}^{+M'}$$

gleichbedeutend ist.

Setzt man in diesen Gleichungen der Reihe nach

$$u = 0, \quad K, \quad K+K'i,$$

so ergiebt sich nach leichter Umformung das System der neun Formeln:

$$(\mathfrak{A}.) \begin{cases} 0 = \Sigma \frac{(-1)^{\mu}}{2\mu K+(2\mu'+1)K'i}, & ik = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+\mu'+1}}{2\mu K+(2\mu'+1)K'i}, & i = \Sigma \frac{(-1)^{\mu'+1}}{2\mu K+(2\mu'+1)K'i}, \\ k = \Sigma \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i}, & 0 = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i}, & ik' = \Sigma \frac{(-1)^{\mu'+1}}{(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i}, \\ 1 = \Sigma \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)K+2\mu'K'i}, & k' = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{(2\mu+1)K+2\mu'K'i}, & 0 = \Sigma \frac{(-1)^{\mu'}}{(2\mu+1)K+2\mu'K'i}. \end{cases}$$

Die Formeln für ik und i gehen nach Division mit i in *Kronecker*s Formeln ($\mathfrak{P}''.$) und ($\mathfrak{R}.$) über. Ihnen sind aber als durchaus gleichberechtigt die Formeln für k, ik', 1 und k' hinzuzufügen, während die Formeln, bei welchen links 0 steht, wie es ja auch von vornherein zu erwarten ist, identisch bestehen; denn zu jedem Gliede der Summen auf der rechten Seite gehört ein zweites, welches von ihm nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen unterschieden ist.

3.

Durch Differentiation nach u erhält man aus den Partialbruchzerlegungen von *Briot* und *Bouquet:*

$$(4.) \qquad kcnu.dnu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2},$$

$$(5.) \qquad -ikdnu.snu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu+\mu'+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2},$$

$$(6.) \qquad -ik^2snu.cnu = \Sigma \frac{(-1)^{\mu'+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen wiederum

$$u = 0, \quad K, \quad K+K'i,$$

so ergeben sich abermals neun Formeln, von denen jedoch sechs reine Identitäten sind. Die übrig bleibenden drei Formeln lauten:

$$(\mathfrak{B}.) \qquad \begin{cases} k = \Sigma \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}, \\ -ikk' = \Sigma \dfrac{(-1)^{\mu+\mu'}}{[(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i]^2}, \\ -k' = \Sigma \dfrac{(-1)^{\mu'+1}}{[(2\mu+1)K+2\mu'K'i]^2}. \end{cases}$$

4.

Zu den Formeln ($\mathfrak{B}$.) gelangt man auch, wenn man nach dem *Mittag-Lefflerschen* Theoreme *Partialbruchzerlegungen* für die Ableitungen von *snu, cnu* und *dnu* herleitet.

Es ist zunächst:

$$(7.) \qquad k\frac{dsnu}{du} = \sum_{\mu,\mu'}\left\{\frac{(-1)^{\mu+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2} - \frac{(-1)^{\mu+1}}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}\right\}+k,$$

denn die Summe ist eine doppeltperiodische Function von u, welche für $u=0$ verschwindet. Hieraus erhält man durch gliedweise Integration:

$$ksnu = \sum_{\mu,\mu'}\left\{\frac{(-1)^{\mu}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} - \frac{(-1)^{\mu+1}}{2\mu K+(2\mu'+1)K'i} + \frac{(-1)^{\mu}.u}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}\right\}+ku.$$

Wird nunmehr die Anordnung der Summation so genommen, dass

$$\Sigma = \lim_{M=\infty}\lim_{M'=\infty}\sum_{\mu=-M}^{+M}\sum_{\mu'=-M'}^{+M'}$$

ist, so convergiren die einzelnen Theile der Summe für sich, und da das zweite Glied die Summe Null ergiebt, kommt die Gleichung:

$$(7^*.) \qquad ksnu = \Sigma\frac{(-1)^{\mu}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} + u\left(\Sigma\frac{(-1)^{\mu}}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}+k\right).$$

Nun bleibt das erste Glied rechts ungeändert, wenn u um $4K$ vermehrt wird, folglich verschwindet der Coefficient von u, und es ist

$$(\mathfrak{B}_1.) \qquad k = \Sigma\frac{(-1)^{\mu+1}}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}.$$

Weiter hat man:

$$(8.) \qquad ik\frac{dcnu}{du} = \sum_{\mu,\mu'}\left\{\frac{(-1)^{\mu+\mu'+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2} - \frac{(-1)^{\mu+\mu'+1}}{[(2\mu-1)K+(2\mu'+1)K'i]^2}\right\}-ikk',$$

denn die Summe ist eine doppeltperiodische Function von u, welche für $u = K$ verschwindet. Hieraus erhält man durch gliedweise Integration:

$$ikcnu = \sum_{\mu,\mu'}\Big\{\frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} - \frac{(-1)^{\mu+\mu'+1}}{(2\mu-1)K+(2\mu'+1)K'i} + \frac{(-1)^{\mu+\mu'}.(u-K)}{[(2\mu-1)K+(2\mu'+1)K'i]^2}\Big\} - ikk'(u-K).$$

Wird nunmehr die Anordnung der Summation in der früheren Art vorgenommen, so convergiren die einzelnen Theile der Summe für sich, und da das zweite Glied der Summe herausfällt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(8^*.)\quad ikcnu = \Sigma\frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} + (u-K)\Big(\Sigma\frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{[(2\mu-1)K+(2\mu'+1)K'i]^2} - ikk'\Big),$$

folglich ist:

$$(\mathfrak{B}_2.)\qquad -ikk' = \Sigma\frac{(-1)^{\mu+\mu'}}{[(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i]^2}.$$

Endlich findet man:

$$(9.)\qquad i\frac{ddnu}{du} = \sum_{\mu,\mu'}\Big\{\frac{(-1)^{\mu'+1}}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i]^2} - \frac{(-1)^{\mu'+1}}{[(2\mu-1)K+2\mu'K'i]^2}\Big\} - k',$$

denn die Summe ist eine doppeltperiodische Function von u, welche für $u = K+K'i$ verschwindet. Gliedweise Integration ergiebt:

$$idnu = \sum_{\mu,\mu'}\Big\{\frac{(-1)^{\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} - \frac{(-1)^{\mu'+1}}{(2\mu-1)K+2\mu'K'i} + \frac{(-1)^{\mu}.(u-K-K'i)}{[(2\mu-1)K+2\mu'K'i]^2}\Big\} - k'(u-K-K'i).$$

Hieraus folgt bei der früheren Anordnung der Summation:

$$(9^*.)\quad idnu = \Sigma\frac{(-1)^{\mu'}}{u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i} + (u-K-K'i)\Big(\Sigma\frac{(-1)^{\mu'}}{[(2\mu-1)K+2\mu'K'i]^2} - k'\Big),$$

mithin ist:

$$(\mathfrak{B}_3.)\qquad -k' = \Sigma\frac{(-1)^{\mu'+1}}{[(2\mu+1)K+2\mu'K'i]^2}.$$

5.

Zum Schluss sollen die Quadrate der Functionen snu, cnu und dnu zur Herleitung von Relationen der betrachteten Art benutzt werden; dabei genügt es offenbar, wenn man sich auf sn^2u beschränkt.

Das *Mittag-Lefflersche* Theorem liefert dann die *Partialbruchzerlegung:*

$$(10.)\qquad k^2sn^2u = \sum_{\mu,\mu'}\Big\{\frac{1}{[u-2\mu K-(2\mu'+1)K'i)]^2} - \frac{1}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}\Big\},$$

und hieraus findet man die Formeln:

$$(\mathfrak{C}.)\quad \begin{cases} k^2 = \sum\limits_{\mu,\mu'} \left\{ \dfrac{1}{[(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i]^2} - \dfrac{1}{[2\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2} \right\} = \sum\limits_{\mu,\mu'} \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{[\mu K+(2\mu'+1)K'i]^2}, \\ k'^2 = \sum\limits_{\mu,\mu'} \left\{ \dfrac{1}{[(2\mu+1)K+2\mu' K'i]^2} - \dfrac{1}{[(2\mu+1)K+(2\mu'+1)K'i]^2} \right\} = \sum\limits_{\mu,\mu'} \dfrac{(-1)^{\mu'}}{[(2\mu+1)K+\mu' K'i]^2}, \end{cases}$$

von denen die erste entsteht, indem man in Gleichung (10.) $u = K$ setzt, während sich die zweite dadurch ergiebt, dass man in derselben Gleichung $u = K+K'i$ setzt und aus der so hervorgehenden Darstellung der Einheit mittelst der Relation

$$k^2+k'^2 = 1$$

die Grösse k'^2 berechnet. Es ist noch zu bemerken, dass bei den Formeln (𝔈.) die Anordnung der Summation gleichgültig ist, was bei den Formeln (𝔄.) und (𝔅.) nicht der Fall war.

Es wäre leicht, die Anzahl dieser Formeln noch zu vermehren, denn berechnet man vermöge des *Mittag-Lefflers*chen Theorems *die Partialbruchzerlegung irgend einer rationalen Function von snu, cnu und dnu,* so braucht man bloss

$$u = 0, \quad K, \quad K', \quad K+K'i$$

zu setzen, um Relationen zwischen k, K und $K'i$ zu erhalten, welche den Formeln (𝔄.), (𝔅.) und (𝔈.) an die Seite zu stellen sind.

Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen.

(Mit einer Figurentafel.)

(Von Herrn *W. Heymann* in Chemnitz.)

I. *Die Methode.*

Die zur Anwendung kommende Methode ist eine *analytisch geometrische,* deren Grundzüge ich an anderer Stelle*) entwickelt habe. In vorliegender Abhandlung werde ich meine früheren Untersuchungen nur streifen, bezüglich vervollständigen. Als eigentlich *neu* tritt die trinomische Gleichung *geraden* Grades und der in der Ueberschrift bezeichnete Gegenstand auf.

Die Auflösung jedweder Gleichung

$$F(x) = 0 \tag{1.}$$

kann zurückgeführt werden auf die Ermittelung der reellen und imaginären Schnittpunkte zweier Curven

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \Psi(x, y) = 0, \tag{2.}$$

deren Gleichungen nur an die eine Bedingung gebunden sind, dass die Elimination von y die Gleichung (1.) ergiebt.

Denkt man sich die Gleichungen (2.) auf ein orthogonales Coordinatensystem bezogen und beschreibt zwischen beiden Curven einen gebrochenen Zug, dessen geradlinige Elemente abwechselnd parallel der einen und anderen Coordinatenaxe laufen, und dessen Brechpunkte abwechselnd auf der einen und anderen Curve liegen, so erhält man entweder einen *Anlauf* oder einen *Umlauf,* welcher gegen den etwa vorhandenen reellen Schnitt-

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXXIX. Jahrg. „Ueber die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade.“ — Diese Arbeit werde in der Folge kurz durch (A.) citirt.

punkt convergirt. (Fig. 1 und 2.) Das eine oder andere findet statt, je nachdem in der Umgebung des Schnittpunktes die den beiden Gleichungen (2.) entnommenen Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ gleiche, beziehentlich verschiedene Vorzeichen haben. Es versteht sich von selbst, dass ein solcher Lauf im allgemeinen in passender Nähe des Schnittpunktes begonnen werden muss, und dass die Curven innerhalb des in Betracht kommenden Gebietes als *stetig* vorauszusetzen sind.

Des weiteren wird es sich nun darum handeln, die auf einander folgenden Brechpunkte jener Läufe analytisch zu bestimmen. Bezeichnen wir die Coordinaten derselben durch x_k, y_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, so wird Punkt x_k, y_k dem Schnittpunkt x', y' um so näher liegen, je grösser k gewählt ist. Hierbei ist angenommen, dass die Fortschreitungs- resp. Drehrichtung des An- resp. Umlaufes in einer nicht misszuverstehenden Richtung gewählt wird, die überdies später analytisch festgestellt werden soll.

a) Bestimmung der reellen Schnittpunkte.

Für die Berechnung der Coordinaten der Brechpunkte muss vorausgesetzt werden, dass die Gleichungen (2.) durch einen Eliminationsprocess in die Gestalt

$$(3.) \qquad y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

gebracht werden können, und dass diese Gleichungen auch *umkehrbar* seien. Die inversen, nach x aufgelösten Formen mögen durch

$$(4.) \qquad x = \varphi^{-1}(y) \quad \text{resp.} \quad x = \psi^{-1}(y)$$

bezeichnet werden.

Ist eine solche Darstellung, die allerdings die Allgemeinheit des Problems wesentlich beeinträchtigt, möglich, dann lassen sich die Coordinaten x_k, y_k durch eine Kettenentwickelung unmittelbar angeben. Liegt nämlich der willkürlich angenommene Anfangspunkt x_0, y_0 des convergirenden Laufes auf Curve ψ, so hat man sowohl für einen Anlauf als auch für einen Umlauf

$$y_0 = \psi x_0, \quad x_1 = \varphi^{-1} y_0 = \varphi^{-1}\psi x_0, \quad y_1 = \psi x_1 = \psi\varphi^{-1}\psi x_0,$$
$$x_2 = \varphi^{-1} y_1 = \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi x_0 = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(2)}, \quad \ldots$$

und allgemein

$$(5.) \qquad x_k = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}, \quad y_k = \psi x_k,$$

wobei der Index (k) angiebt, wie oft die Operation $\varphi^{-1}\psi$ wiederholt wurde, oder anders ausgedrückt, wie oft die *Periode* $\varphi^{-1}\psi$ vorhanden ist. — Liegt jener Anfangspunkt x_0, y_0 auf Curve φ, so vertausche man einfach das Symbol φ mit ψ.

Um analytisch zu entscheiden, ob das eine oder andere eintritt, setze man fest, dass die Läufe stets in der Abscissenrichtung zu beginnen sind. Der Anfangspunkt des *convergenten* Laufes befindet sich dann stets auf der weniger steilen Curve, also genauer gesprochen, auf φ resp. ψ, je nachdem absolut genommen

$$\frac{d\varphi}{dx} \gtrless \frac{d\psi}{dx}, \quad (x = x_0). \tag{6.}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass x_0, y_0 dem Schnittpunkt x', y' bereits so nahe liegt, dass obige Ungleichung für alle Werthe x zwischen x_0 und x' bestehen bleibt.

Hat man nun die Kettenentwickelung bis zu einem gewissen x_k fortgesetzt, so wird $\psi x_k = y_k$ von

$$\varphi x_k = \varphi[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} = \psi[\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k-1)} = \psi x_{k-1} = y_{k-1}$$

um so weniger verschieden sein, je grösser k gewählt wurde. Es kann also

$$\varphi x_k - \psi x_k = y_{k-1} - y_k = \delta \tag{7.}$$

durch ein hinreichend grosses k im allgemeinen beliebig klein gemacht werden, so dass für ein verschwindendes δ die unendliche Kette x_k, $(k = \infty)$ *eine* reelle Wurzel der Gleichung

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0 \tag{8.}$$

darstellt. Für endliche k zeigt die Ordinatendifferenz δ die Grösse des Fehlers an, der durch Eintragung der Abscissen x_k in die linke Seite der Gleichung (8.) verursacht wird.

b) Indifferente Umläufe.

Eine wesentliche Unterbrechung der Convergenz kann bei Umläufen eintreten, dann nämlich, wenn diese nach einem oder mehreren vollen Umgängen in sich zurückkehren. Solche Umläufe mögen *indifferent* genannt werden. (Fig. 3 und 4.)

Der im Punkte x_0, y_0 begonnene Umlauf kehrt nach einem vollen Umgang oder nach zweien, dreien u. s. f. in sich zurück, je nachdem

$$x_0 = x_2, \quad x_0 = x_4, \quad x_0 = x_6, \quad \ldots, \quad x_0 = x_{2p},$$

und dem entsprechend unterscheiden wir indifferente Umläufe erster, zweiter, $p$ter Ordnung. Am häufigsten treten diejenigen erster Ordnung auf (Fig. 3), und die analytische Bedingung für ihr Erscheinen ist wegen $x_0 = x_2$, je nach der Drehrichtung,

$$x_0 = \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi x_0 \quad \text{oder} \quad x_0 = \psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi x_0.$$

Wird hier die Operation $\psi^{-1}\varphi$, resp. $\varphi^{-1}\psi$ beiderseits vollzogen, so ergiebt sich in beiden Fällen

$$\psi^{-1}\varphi x_0 = \varphi^{-1}\psi x_0, \tag{9.}$$

und damit reducirt sich die Kettenfunction (5.) auf $x_k = x_0$ oder $x_k = x_1$, je nachdem k gerade oder ungerade ist, d. h. sie oscillirt zwischen den Werthen x_0 und x_1.

Jeder indifferente Umlauf, der ein endliches Gebiet umschliesst, stört die Kettenentwickelung nicht mehr, sobald ein neuer Anfangspunkt x_0, y_0 innerhalb des betreffenden Gebietes angenommen wird. Der in diesem Punkte neu begonnene Umlauf convergirt dann in der einen Drehrichtung nach dem im Innern des indifferenten Umlaufes vorhandenen Schnittpunkt. In der entgegengesetzten Richtung würde er in den indifferenten Lauf übergehen. (Fig. 3.)

Es kann jedoch vorkommen, dass sich mehrere indifferente Umläufe centrisch umschliessen, (vgl. die betreffende Untersuchung in Abhandl. (A.)); solchenfalls muss der Anfangspunkt x_0, y_0 innerhalb desjenigen Umlaufes verlegt werden, der sich dem Schnittpunkt x', y' am meisten anschmiegt.

Für die Berechnung der Anfangsabscisse x_0 eines indifferenten Umlaufes ist es zweckmässig, die Gleichung (9.) zu spalten in

$$\eta = \psi^{-1}\varphi\xi = \Phi(\xi) \quad \text{und} \quad \eta = \varphi^{-1}\psi\xi = \Psi(\xi), \quad (\xi = x_0) \tag{10.}$$

und die reellen Schnitte des Curvensystems Φ, Ψ aufzusuchen. Man gewinnt so nochmals die Schnittpunktsabscissen des Curvensystems φ, ψ; alle weiteren reellen Lösungen führen zur Bestimmung der indifferenten Umläufe. Was die erste Behauptung betrifft, so wolle man beachten, dass jeder reelle Schnittpunkt x', y' zweier Curven φ, ψ als ein unendlich kleiner indifferenter Umlauf angesehen werden kann. Uebrigens folgt auch analytisch, dass jede Wurzel der Gleichung

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0 \quad \text{der Gleichung} \quad \psi^{-1}\varphi(x) - \varphi^{-1}\psi(x) = 0$$

genügen muss, denn letztere reducirt sich für $\varphi = \psi$ auf die Identität $x = x$.

Einem indifferenten Umlauf $p$ter Ordnung im System φ, ψ entsprechen $2p$ Schnittpunkte im System Φ, Ψ, denn die $4p$ Brechpunkte des Umlaufes sind durch $2p$ Abscissen bestimmt, und eine jede derselben kann als Anfangsabscisse gelten. — Sind ξ' und ξ'' zwei Abscissen, welche einen indifferenten Umlauf erster Ordnung abgrenzen, so bestehen die simultanen Gleichungen

$$\varphi(\xi') = \psi(\xi''), \quad \varphi(\xi'') = \psi(\xi'),$$

also ist

$$\xi'' = \psi^{-1}\varphi\xi' = \varphi^{-1}\psi\xi',$$

was auf (9.) zurückkommt.

Bestimmt man die indifferenten Umläufe erster Ordnung des Systems (10.), so gelangt man zu der Gleichung

$$\Psi^{-1}\Phi = \Phi^{-1}\Psi,$$

oder in den ursprünglichen Symbolen φ, ψ geschrieben, zu

$$\psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi = \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi,$$

d. h. zur Bedingungsgleichung für die indifferenten Umläufe zweiter Ordnung des Systems φ, ψ. Demnach führt die Betrachtung der indifferenten Umläufe *höherer* Ordnung auf die *niederer* Ordnung zurück.

c) Polarcoordinaten.

Vertauscht man in den Gleichungen (3.) die Parallelcoordinaten x, y direct mit Polarcoordinaten θ, r, also

(11.) $$r = \varphi(\theta) \quad \text{und} \quad r = \psi(\theta),$$

so entsprechen diesen Gleichungen natürlich *wesentlich* andere Curven. Die Elemente der Läufe sind abwechselnd Kreisbögen und Gerade. (Fig. 5.)

Bezeichnet man den Winkel zwischen r und der zu r gehörigen Curventangente mit σ und setzt fest, dass einem abnehmenden σ eine Drehung der Tangente um den Berührungspunkt im Sinne der Uhrzeigerbewegung entspricht, so ist

$$\operatorname{ctg}\sigma = \frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{r'}{r}.$$

Bezeichnet σ im besonderen die erwähnte Tangentenabweichung für die Curve φ, σ_1 aber für ψ, so wird die Bedingung für eine *Berührung*

$$\sigma = \sigma_1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\varphi}{\varphi\,d\theta} = \frac{d\psi}{\psi\,d\theta},$$

für einen ***supplementaren Schnitt***

$$\sigma+\sigma_1 = 180^0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\varphi}{\varphi\, d\theta} = -\frac{d\psi}{\psi\, d\theta}.$$

Letztere Bedingung sagt aus, dass die Tangenten der Curven φ, ψ zu *beiden* Seiten von r um gleiche Winkel abweichen. — Der Ausdruck „supplementarer Schnitt" ist nur mit Rücksicht auf die Winkelsumme $\sigma+\sigma_1$ gewählt. Bei rechtwinkligen Coordinaten werden wir uns gleichfalls desselben bedienen, wenn $\tau+\tau_1 = 180^0$, unter τ und τ_1 die Abweichungen der Tangenten von der positiven Abscissenrichtung verstanden. Es sei vorausgeschickt, dass jener Schnitt insofern interessirt, als in seiner unmittelbaren Nähe die Drehrichtung der Umläufe ***unbestimmt*** wird, wie durch Betrachtung der Tangenten unmittelbar einleuchtet.

Da für den Berührungspunkt wie für den supplementaren Schnitt $\varphi = \psi$ wird, so reduciren sich obige Bedingungen auf

$$(12.) \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta}, \quad \text{resp.} \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{d\psi}{d\theta},$$

d. h., sie lauten genau so wie die entsprechenden Bedingungen in *rechtwinkligen* Coordinaten. Genau wie dort beurtheilt man auch, ob ein An- oder Umlauf stattfindet, danach, ob die Ableitungen φ' und ψ' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Die Bedingung für das Auftreten eines indifferenten Umlaufes $p$ter Ordnung ist $\theta_0 = \theta_{2p}$.

Man übersieht, dass sich hier trotz des veränderten geometrischen Bildes an den analytischen Vorgängen, besonders aber an der ***Kettenentwickelung*** nichts ändern kann.

d) Bestimmung der imaginären Schnittpunkte.

Um die complexen Wurzeln von

$$1) \quad F(x) = 0$$

zu erhalten, setze man

$$x = u+iv \qquad (i=\sqrt{-1})$$

und erhält

$$\Phi(u, v)+i\Psi(u, v) = 0.$$

Die Aufgabe läuft daher auf die schon erörterte Bestimmung der ***reellen*** Schnittpunkte der Curven

$$2^a) \quad \Phi(u, v) = 0, \quad \Psi(u, v) = 0$$

hinaus.

Ist $F(x)$ speciell eine *rationale* Function mit nur *reellen* Coefficienten, so denke man sich jedes Paar conjugirter Wurzeln der Gleichung (1.) in eine quadratische Gleichung

$$x^2+sx+t = 0$$

zusammengefasst. Die *reellen* Coefficienten s, t derselben hängen dann von einer Resolvente ab, die im allgemeinen nicht mehr algebraisch gelöst werden kann. Um zu jener Resolvente zu gelangen, beachte man, dass die linke Seite der letzten Gleichung trinomischer Factor von F wird, oder, was vielleicht hier zweckmässiger ist, man reducire die Gleichung (1.) mittelst der quadratischen Gleichung successive auf

$$F(x) = \Phi(s,\ t)+x\,\Psi(s,\ t) = 0.$$

Dieses zerfällt in

$$2^b)\quad \Phi(s,\ t) = 0, \quad \Psi(s,\ t) = 0,$$

und hieraus könnte eine Resolvente in s oder t abgeleitet werden. Indessen gehören bereits die Gleichungen $2^b)$ wieder zu dem Fall, der unserer Betrachtung überhaupt zu Grunde liegt.

Nach obiger Darstellung findet schliesslich zwischen der Berechnung der reellen und complexen Wurzeln ein principieller Unterschied *nicht* statt. Wir wollen uns deshalb nur mit ersteren beschäftigen und die Eigenthümlichkeiten unserer Methode an einem möglichst einfachen Beispiel, der trinomischen Gleichung, auseinandersetzen.

II. *Die trinomische Gleichung.*

a) Die Normalformen.

Die allgemeinste Form einer solchen Gleichung ist

$$z^n+az^p+b = 0, \qquad (n>p) \tag{13.}$$

unter a, b beliebige reelle Zahlen, unter n, p ganze positive Zahlen verstanden. Man darf voraussetzen, dass n und p keinen gemeinsamen Theiler besitzen, überdies noch, dass p stets *ungerade* ist. Denn sollte p gerade sein, mithin n ungerade, so kann die Gleichung (13.) mittelst der Substitution $z = \frac{1}{z_1}$ in eine andere *derselben* Form transformirt werden, bei welcher die ungerade Zahl $n-p$ an Stelle von p tritt. Je nach dem Vorzeichen von

a und b unterscheiden wir folgende vier Fälle

$$(14.)\qquad \begin{cases} \alpha) & z^n+az^p+b = 0, \\ \beta) & z^n-az^p+b = 0, \\ \gamma) & z^n+az^p-b = 0, \\ \delta) & z^n-az^p-b = 0, \end{cases}$$

wo nun a, b durchaus positiv, n gerade oder ungerade, p ungerade, $n > p$ ist.

Ist n *gerade*, so würde durch Vertauschung von z mit $-z$ Gleichung $\alpha)$ in $\beta)$ und $\gamma)$ in $\delta)$ übergehen. In diesem Falle betrachte man also nur $\beta)$ und $\delta)$.

Ist n *ungerade*, so würde bei der gleichen Vertauschung $\alpha)$ in $\gamma)$ und $\beta)$ in $\delta)$ übergehen. In diesem Falle betrachte man nur $\gamma)$ und $\delta)$.

Substituirt man weiter

$$z = a^{\frac{1}{n-p}} x^{\frac{1}{p}}, \quad b.a^{-\frac{n}{n-p}} = c, \quad \frac{n}{p} = r, \qquad (r > 1)$$

so hat man, wenn n *gerade*, die beiden Normalformen

$$(15.)\qquad \begin{cases} \beta') & x^r-x+c = 0, \\ \delta') & x^r-x-c = 0, \end{cases}$$

und wenn n *ungerade* ist,

$$(16.)\qquad \begin{cases} \gamma') & x^r+x-c = 0, \\ \delta') & x^r-x-c = 0, \end{cases}$$

wobei c eine beliebige *positive* Zahl bedeutet.

Wir spalten nun die Gleichungen (15.) und (16.) in

$$(17.)\qquad y = x^r$$

und

$$(18.)\qquad \beta')\ y = x-c, \quad \text{resp.} \quad \gamma')\ y = c-x, \quad \text{resp.} \quad \delta')\ y = x+c$$

und betrachten sonach den Schnitt einer höheren Parabel (17.) mit einer der Geraden (18.). Betreffs der Parabel sei Folgendes erwähnt. Dieselbe besitzt zu beiden Seiten der Y-Axe zwei congruente Zweige; im Coordinatenanfang O findet zwischen der Curve und der X-Axe mindestens eine Berührung erster Ordnung statt. Ist n gerade, so liegen die Curvenzweige beide über der X-Axe, ist n aber ungerade, zu verschiedenen Seiten derselben, und in letzterem Falle besitzt die Curve in O einen Inflexionspunkt. Es ist wichtig zu bemerken, dass sich diese charakteristischen Merkmale

nur mit n, ***nicht*** aber mit p ändern, sobald daran festgehalten wird, dass p ***ungerade*** und $p < n$ ist. Sonach bietet die Untersuchung des Falles, wenn p eine beliebige ungerade Zahl ist, nicht mehr Schwierigkeiten, als wenn $p = 1$.

Da wir den Fall, wo n ungerade und $p = 1$, bereits in Abhandlung (A.) erledigt haben, so betrachten wir an dieser Stelle Gleichung (17.) nur in Verbindung mit (15.), also

$$(19.) \qquad \begin{cases} y = x^r & = \varphi(x), \\ y = x - c & = \psi(x) \end{cases}$$

und

$$(20.) \qquad \begin{cases} y = x^r & = \varphi(x), \\ y = x + c & = \psi(x), \end{cases}$$

wo c beliebig positiv und $r = \frac{n}{p}$ ein unechter Bruch ist, dessen Zähler positiv und gerade, dessen Nenner positiv und ungerade angenommen wird.

Der Fall, wo n ungerade und p gerade ist, welcher also, wie eben erwähnt, ausgeschlossen werden kann und soll, bietet bei directer Inangriffnahme nach den früheren Principien immerhin manches Neue. Die Curve φ wird hier eine *Neil*sche Parabel höherer Ordnung, und die doppelte Darstellung jeder reellen Wurzel der trinomischen Gleichung, einmal in der Form $x = \frac{1}{A}$, dann $x = B$, wo A und B Kettenfunctionen sind, liefert zugleich ein Mittel zur Vergleichung dieser Transcendenten.

b) Schnittpunktsbestimmung für die Curven

$$(19.) \qquad y = x^r = \varphi \quad \text{und} \quad y = x - c = \psi. \qquad \left(r = \tfrac{n}{p}\right)$$

Man constatire zunächst, dass höchstens ***zwei*** reelle Schnittpunkte vorhanden sein können (Fig. 6.). Dieselben fallen zusammen, wenn

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dx},$$

die Abscisse des Berührungspunktes wird

$$(21.) \qquad x^{(0)} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} = \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}},$$

und dem entsprechend ist

$$(22.) \qquad c^{(0)} = (r-1)r^{-\frac{r}{r-1}} = (n-p)p^{\frac{p}{n-p}}n^{-\frac{n}{n-p}} = \frac{n-p}{n}x^{(0)},$$

oder auch

$$\Delta = 0,$$

wobei

(23.) $$\Delta = n^n c^{n-p} - (n-p)^{n-p} p^p$$

die ***Discriminante*** der trinomischen Gleichung vorstellt. ***Zwei*** reelle Schnittpunkte sind demnach vorhanden, wenn $\Delta < 0$. Dieselben werden beide durch ***Anläufe*** erreicht.

Der Anlauf gegen x', y' beginnt auf der Parabel φ, die Abscisse seines Anfangspunktes ist etwa $x_0 = 0$ oder $x_0 = c$, und die entsprechende *convergente* Kettenentwickelung wird

(24.) $$x' = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)} = c + \sqrt[\frac{1}{r}]{c + \sqrt[\frac{1}{r}]{c + \cdots + \sqrt[\frac{1}{r}]{c + x_0^r}}}. \qquad (x_0 = 0)$$

Der Anlauf gegen x'', y'' beginnt auf der Geraden ψ, die Abscisse seines Anfangspunktes ist etwa $x_0 = 1$, weil sicher $x'' < 1$, so lange c von Null verschieden ist, und die entsprechende *convergente* Kettenentwickelung wird

(25.) $$x'' = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} = \sqrt[r]{-c + \sqrt[r]{-c + \cdots + \sqrt[r]{-c + x_0}}}. \qquad (x_0 = 1)$$

Als Anfangswerth kann in ***beiden*** Ketten (24.) und (25.) auch die Berührungsabscisse $x_0 = x^{(0)}$ aus (21.) gebraucht werden. Diese Wahl erscheint nicht nur ***einheitlicher,*** sie ist unter Umständen auch ***zweckmässiger.*** Obige Kettenwurzeln haben nämlich die Eigenthümlichkeit, für einander nahe liegende Schnittpunkte ***schwach*** zu convergiren. Jene Erscheinung findet sich, wie schon ***Gauss*** bemerkt hat, überhaupt bei convergenten unendlichen Processen, durch welche nahezu gleiche Wurzeln einer Gleichung dargestellt werden. Sind also die beiden reellen Wurzeln der trinomischen Gleichung wenig von einander verschieden, so beginnen wir wenigstens die Anläufe mit einem x_0, welches dem gesuchten x' und x'' um so näher liegt, je schwächer die in Aussicht stehende Convergenz sein wird.

Allerdings ist durch die Wahl $x_0 = x^{(0)}$ nicht mehr ersichtlich, ob der Lauf auf Curve φ oder ψ beginnt, denn die entscheidende Bedingung

$$\varphi'(x_0) \gtrless \psi'(x_0)$$

versagt gerade jetzt. Es ist also nothwendig, diese Ungleichung für be-

nachbarte Punkte zu betrachten, wie oben bei der Einführung von Δ geschehen ist.

Ich möchte mir erlauben, hier noch auf eins aufmerksam zu machen. Kettenwurzeln, wie die unter No. (24.) und (25.), sind schon öfters betrachtet und zur Auflösung trinomischer Gleichungen benutzt worden*), meines Wissens aber stets *ohne geometrische Interpretation.* Daher ist es auch gekommen, dass man kein Kriterium dafür hatte, wann die eine Entwickelung (24.) oder wann die inverse (25.) gilt, d. h. convergent ist, und *welche* Wurzel der Gleichung durch die Kette eigentlich dargestellt wird. Die empfindlichste Lücke, die man bisher gelassen, ist aber die, dass der Anfangswerth x_0 nie angegeben oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen festgesetzt wurde.

Eine Kettenwurzel wie

$$x = \sqrt[r]{-c+\sqrt[r]{-c+\cdots+\sqrt[r]{-c}}}$$

führt allerdings nach einmaliger Potenzirung auf

$$x^r - x + c = 0;$$

sie ist aber trotzdem ohne Angabe des Anfangswerthes x_0 völlig *sinnlos.* Vom geometrischen Gesichtspunkte aus ist unmittelbar gewiss, dass ein Anfangswerth x_0, wie in (25.), einzuschalten ist, und zwar muss er positiv und grösser als x' sein, wo x' die durch (24.) dargestellte kleinere Wurzel der trinomischen Gleichung bedeutet.

c) Schnittpunktsbestimmung für die Curven

(20.) $$y = x^r = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = x + c = \psi(x). \qquad \left(r = \frac{n}{p}\right)$$

Man constatire zunächst, dass höchstens *zwei* reelle Schnittpunkte x'', y'' und x''', y''' vorhanden sind und dass, so lange $c > 0$, die eine Abscisse x'' immer *positiv,* die andere x''' *negativ* ist (Fig. 7). Der Punkt x'', y'' wird stets durch einen *Anlauf* erreicht, der Punkt x''', y''' durch einen *Umlauf,* denn es ist $\frac{d\psi}{dx} = 1$, also positiv; dagegen ist $\frac{d\varphi}{dx} = r x^{r-1}$ positiv, resp. negativ, je nachdem x positiv oder negativ ist.

*) Vergl. *S. Günther,* Die Lehre von den Hyperbelfunctionen, S. 75. — Ebenda findet man auch reichlich diesbezügliche Litteraturangaben.

Der Anlauf gegen Punkt x'', y'' beginnt auf der Geraden ψ, die Abscisse seines Anfanges ist etwa $x_0 = 0$ oder irgendwelche *positive* Zahl, die von x'' nicht unnöthig viel verschieden ist. Theoretisch besonders berechtigt erscheint indessen der Werth

$$x_0 = x^{(0)} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}}, \tag{21.}$$

wie wir ihn im vorigen Abschnitt als Berührungsabscisse fanden. Aehnlich wie dort lautet auch die zugehörige Kette, nämlich

$$x'' = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} = \sqrt[r]{c+\sqrt[r]{c+\cdots+\sqrt[r]{c+x_0}}}, \qquad (x_0 = x^{(0)}) \tag{25a.}$$

und hier hat sich nur das Vorzeichen von c geändert.

Zur Bestimmung des Umlaufes um Punkt x''', y''' wird es nöthig, die Coordinaten des *„supplementaren Schnittes"* zu ermitteln. Wir verstehen darunter jenen Schnittpunkt der Curven φ und ψ, für welchen ihre Tangenten gegen die Abscissenaxe derartig geneigt sind, dass die im gleichen Sinne gemessenen Neigungswinkel sich zu 180^0 ergänzen. — Vergl. auch Abschn. I, c). — Die analytische Bedingung für das Eintreten eines solchen Schnittes ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d\psi}{dx},$$

woraus die Abscisse

$$\bar{x} = -\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{r-1}} = -\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}} = -x^{(0)} \tag{26.}$$

folgt, und dem entsprechend wird

$$\bar{c} = (r+1)r^{-\frac{r}{r-1}} = (n+p)p^{\frac{p}{n-p}}n^{-\frac{n}{n-p}} = -\frac{n+p}{n}\bar{x}, \tag{27.}$$

oder auch

$$\bar{\Delta} = 0,$$

wobei

$$\bar{\Delta} = n^n c^{n-p} - (n+p)^{n-p}p^p, \tag{28.}$$

ein Ausdruck, der sehr an die Discriminante der trinomischen Gleichung erinnert.

Die Umläufe um den supplementaren Schnitt $\bar{x}$, $\bar{y}$ convergiren um so schwächer, je näher sie demselben kommen; in unmittelbarer Nähe wird

der Umlauf indifferent und seine Drehrichtung *unbestimmt.* Wenn $c < \bar{c}$, d. h. $\bar{\Delta} < 0$, so ist der convergente Umlauf *rechts* drehend und beginnt auf Curve φ; wenn $c > \bar{c}$, d. h. $\bar{\Delta} > 0$, so ist derselbe *links* drehend und beginnt auf ψ (Fig. 8.).

Dem entsprechend haben wir folgende *convergente* Ketten

$$(29.) \qquad x''' = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)} = -\left(c - \sqrt[r]{c - \sqrt[r]{c - \cdots \sqrt[r]{c - x_0^r}}}\right), \qquad (\bar{\Delta} < 0)$$

$$(30.) \qquad x''' = [-\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} = -\sqrt[r]{c - \sqrt[r]{c - \cdots \sqrt[r]{c + x_0}}}. \qquad (\bar{\Delta} > 0)$$

Im allgemeinen kann man in beiden Kettenwurzeln $x_0 = 0$ annehmen; der besondere Fall, bei welchem ein endlicher indifferenter Umlauf die Convergenz stört, wird im nächsten Abschnitt erörtert. — Andererseits empfiehlt sich für x_0 auch die Abscisse $\bar{x}$ des supplementaren Schnittes, besonders aber dann, wenn x''' von $\bar{x}$ wenig abweicht.

Wir unterlassen es, an diesem Orte Zahlenbeispiele zu geben, weil wir solche reichlich in Abhandlung (A.) mitgetheilt haben. Betreffs der praktischen Ausführung sei nur erwähnt, dass es in complicirten Fällen nicht zweckmässig ist, die Kettenfunction explicite anzuschreiben. Man stellt besser *Tabellen* auf, aus denen die aufeinander folgenden Coordinaten der Brechpunkte der Läufe, x_k, y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, ersehen werden können, und die dann leicht die Beurtheilung der Fehler gestatten.

Die Zahlen der Tabellen ergeben sich stets aus dem Gleichungssystem

$$x = \varphi^{-1}(y), \quad y = \psi(x),$$

oder aus dem inversen

$$x = \psi^{-1}(y), \quad x = \varphi(x).$$

Die *zweite* Gleichung jedes Systems beginnt den Process mit einem bestimmt festgesetzten Anfangswerth x_0. Als Anfangswerthe gelten im allgemeinen alle *reellen* Zahlen, welche den Gleichungen

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dx} \mp \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

(bei verschwindendem Δ oder $\bar{\Delta}$) gleichzeitig genügen können, oder anders

ausgedrückt, alle Abscissen, die zu den Berührungspunkten, resp. supplementaren Schnitten gehören, welche von den Curven φ und ψ möglicherweise gebildet werden können.

Berücksichtigt man auch die Mehrdeutigkeit, die in den Functionszeichen φ, ψ, φ^{-1}, ψ^{-1} etwa liegen kann, so gelangt man thatsächlich zu *allen reellen* Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x)-\psi(x) = 0. \tag{8.}$$

d) Indifferente Umläufe im Curvensystem

$$y = x^r = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = x+c = \psi(x). \qquad \left(r=\tfrac{n}{p}\right) \tag{20.}$$

Die Bedingung, dass der in einem gewissen Anfangspunkte x_0, y_0 begonnene Umlauf *indifferent* von der *ersten* Ordnung ist, war $x_2 = x_0$, d. h.

$$\psi^{-1}\varphi x_0 = \varphi^{-1}\psi x_0, \tag{9.}$$

also für unser Beispiel (20.)

$$x_0^r - c = \sqrt[r]{x_0+c}. \tag{31.}$$

Um die reellen Werthe von x_0 zu finden, welche dieser Gleichung genügen, betrachten wir die Schnittpunkte der Curven

$$\eta = \xi^r - c = \Phi(\xi) \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt[r]{\xi+c} = \Psi(\xi), \qquad (\xi = x_0) \tag{32.}$$

wobei also $\Phi = \psi^{-1}\varphi$, $\Psi = \varphi^{-1}\psi$, die bekannten Perioden sind. Hier treten nun in verschiedenen Lagen zwei Parabeln auf, die offenbar der früheren $y = x^r$ congruent sind.

Constatiren wir zunächst, dass für ein gewisses c Berührung stattfinden muss. Indem wir uns (Fig. 9) den Parameter c abnehmend denken, rückt Punkt 2 dem Punkt 3 näher; in ganz demselben Maasse nähert sich aber auch Punkt 4 dem Punkt 3. Hieraus schliessen wir, dass genannte drei Punkte in einem einzigen zur Coincidenz kommen, in welchem sonach eine Berührung *zweiter* Ordnung eintritt.

So lange die Schnittpunkte noch getrennt sind, ergeben sich ihre Abscissen offenbar durch folgende Kettenentwickelungen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für Punkt } 1 & \xi' = [\Phi^{-1}\Psi\xi_0]^{(x)}, \\ \text{-} \quad \text{-} \quad 2 & \xi'' = [-\Phi^{-1}\Psi\xi_0]^{(x)}, \\ \text{-} \quad \text{-} \quad 3 & \xi''' = [-\Phi^{-1}(-\Psi\xi_0)]^{(x)}, \\ \text{-} \quad \text{-} \quad 4 & \xi^{(IV)} = [\Phi^{-1}(-\Psi\xi_0)]^{(x)}. \end{array}\right\} \qquad (\xi_0 = 0)$$

Trägt man in diese Ketten die ursprünglichen Perioden ein, so zeigt sich, dass die erste und dritte Kette die Perioden $\varphi^{-1}\psi$, resp. $-\varphi^{-1}\psi$, die zweite und vierte aber die zusammengesetzteren Perioden

$$-\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi \quad \text{resp.} \quad \varphi^{-1}\psi(-\varphi^{-1}\psi)$$

besitzen. Die Ketten ξ' und ξ''' stellen daher jene Wurzeln der Gleichung

$$\psi^{-1}\varphi\xi = \varphi^{-1}\psi\xi \tag{33.}$$

dar, welche zugleich der Gleichung $\varphi\xi = \psi\xi$ angehören, die Ketten ξ'' und $\xi^{(IV)}$ dagegen ergeben zwei Wurzeln, welche *nur* der Gleichung (33.) zukommen und zur Bestimmung eines endlichen indifferenten Umlaufes führen werden.

Nunmehr ist es leicht, die Bedingung aufzustellen, welche erfüllt sein muss, damit im Punkt 3 die erwähnte Berührung zweiter Ordnung stattfinde. Man hat für die Abscisse desselben gleichzeitig

$$\Phi = \Psi, \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \frac{d^2\Psi}{d\xi^2},$$

wobei die Differentiationen wirklich an Φ und Ψ, d. h. an No. 33 zu vollziehen sind; dagegen kann die Gleichung $\Phi = \Psi$ durch $\varphi = \psi$ ersetzt werden, weil die Abscisse ξ des Punktes 3 gemeinsame Lösung dieser Gleichungen ist. Man findet ohne Mühe, dass alle diese Gleichungen befriedigt werden für

$$\xi = -r^{-\frac{1}{r-1}} \quad \text{und} \quad c = (r+1)r^{-\frac{r}{r-1}},$$

d. h. für $\xi = \bar{x}$, $c = \bar{c}$, wo $\bar{x}$ die Abscisse des supplementaren Schnittes der Curven φ und ψ, $\bar{c}$ das zugehörige c bedeutet. Vgl. (26.) und (27.).

Nach Feststellung dieses Grenzfalles ist deutlich, dass sich die Curven Φ und Ψ in *zwei* oder *vier* reellen Punkten schneiden, je nachdem $c \leqslant \bar{c}$. Im *ersten* Falle findet ein indifferenter Umlauf im Curvensystem φ, ψ *nicht* statt, und die Ketten ξ'' und $\xi^{(IV)}$ werden *imaginär*. Aber auch die Kette ξ''' ist dann divergent, nur ξ' besteht nach wie vor. Denn man wolle sich erinnern, dass die Ketten ξ' und ξ''' zugleich den Anlauf gegen x'', y'', resp. den Umlauf um x''', y''' im Curvensystem φ, ψ (Fig. 7 u. 8) vorstellen, und dass wegen $c < \bar{c}$, d. h. $\overline{\Delta} < 0$, die früher aufgeschriebenen Ketten

$$(25^a.) \quad x'' = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \quad \text{und} \quad (29.) \quad x''' = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}$$

in Betracht kommen. Hier stimmt die Kette x'' wirklich mit ξ' überein, dagegen ist die früher als convergent erkannte Kette x''' genau die ***inverse*** von ξ'''; letztere muss sonach ***divergiren.***

Der ***zweite*** Fall liefert einen indifferenten Umlauf und hat für das Curvensystem φ, ψ überhaupt folgende Bedeutung:

Die Ketten ξ' und ξ''' sind identisch mit den Ketten

$$(25^{a}.) \quad x'' = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \quad \text{und} \quad (30.) \quad x''' = [-\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)}, \qquad (\Delta > 0)$$

und ergeben die beiden Schnittpunktsabscissen (Fig. 10.).

Die Ketten ξ'' und $\xi^{(IV)}$ dagegen liefern zwei Abscissen des Systems φ, ψ, welche einen und denselben indifferenten Umlauf begrenzen, d. h.: Beginnt man mit einer Anfangsabscisse $x_0 = \xi''$ einen Umlauf in irgend welcher Drehrichtung, so wird die Abscisse nach einem halben Umgang $x_1 = \xi^{(IV)}$, nach einem ganzen aber $x_2 = \xi'' = x_0$.

Bemerken wir noch, dass zufolge der Congruenz und besonderen Lage der Curven Φ und Ψ die $\left\{\begin{matrix}\text{Abscisse}\\ \text{Ordinate}\end{matrix}\right\}$ von Punkt 2 gleich der $\left\{\begin{matrix}\text{Ordinate}\\ \text{Abscisse}\end{matrix}\right\}$ von Punkt 4 ist, und dass die Punkte 1 und 3 auf einer durch O gehenden zur Abscissenaxe unter 45^0 geneigten Geraden liegen (Fig. 9.).

Was die Dimensionen des indifferenten Umlaufes angeht, so berechnet man zuerst etwa $x_0 = \xi''$ mittelst der Kette, dann ergeben sich auf Grund der Gleichungen

$$(20.) \qquad y = x' = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = x + c = \psi(x)$$

die Coordinaten der Brechpunkte a, b, c, d und zwar

$$\begin{aligned} &\text{für } a \quad x_0 = x_0, && y_0 = x_0 + c, \\ &\text{für } b \quad x_1 = \varphi^{-1}(y_0), && y_1 = x_1 + c \end{aligned}$$

u. s. f. — Hieraus ersieht man bereits, dass

$$y_1 - y_0 = x_1 - x_0,$$

und da diese Differenzen die anstossenden Seiten des rectangulären Umlaufes messen, so ist dieser ein ***Quadrat.***

Aber auch geometrisch ist letzteres evident und zwar für eine beliebige Curve $y = \varphi(x)$, die mit einer unter 45^0 zur X-Axe geneigten Geraden irgend welche Anzahl indifferenter Umläufe veranlasst, denn jene Gerade ist stets ***Diagonale*** des Umlaufes.

e) Fall $c = 1$.

Unter den indifferenten Umläufen macht sich jener am leichtesten bemerkbar, welcher für $c = 1$ eintritt. Er besteht aus einem Quadrat, dessen eine Ecke in O fällt und dessen Seite gleich der Einheit ist.

Die in Betracht kommende trinomische Gleichung ist jetzt

$$x^r - x - 1 = 0,$$

und ihre negative Wurzel wird bestimmt durch

$$x = -\sqrt[r]{1-\sqrt[r]{1-\cdots\sqrt[r]{1+x_0}}}, \qquad (\bar{\Delta} > 0)$$

aber man bemerkt, dass diese Kette für $x_0 = 0$ oder auch $x_0 = -1$ zwischen den Werthen 0 und -1 hin und her schwankt. Sie bestimmt also nicht die gesuchte Wurzel, sondern einen indifferenten Umlauf, eben jenes Quadrat mit der Seite 1. Wir aber nehmen Gelegenheit, auf die frühere Bemerkung zurückzukommen, dass als Anfangsabscisse der Umläufe der Werth $x_0 = 0$ in den Ketten (29.) und (30.) *nicht* unter allen Umständen zulässig ist, dann nämlich nicht, wenn

$$1 \geqq c > \bar{c}.$$

Ist $c < 1$, so beginnt der indifferente Umlauf zwar nicht mit $x_0 = 0$, wohl aber mit einem früher oder später folgenden x_k. Man könnte sagen: Der mit $x_0 = 0$ beginnende Umlauf convergirt gegen einen, von ihm eingeschlossenen indifferenten Umlauf. Denn dass letzterer vorhanden, ist durch $c > \bar{c}$, d. h. $\bar{\Delta} > 0$ sichergestellt.

Für den Fall nun, dass der Anfangswerth $x_0 = 0$ nicht zulässig ist, bleibt der andere

$$x_0 = \bar{x} = -r^{-\frac{1}{r-1}}$$

brauchbar. Wir sehen somit, dass dieser Werth, resp. mit anderem Vorzeichen versehen, in *allen* Fällen unseres Problems Geltung behält. Gleichwohl scheint es nicht angebracht, wollte man auf den sehr bequemen Anfangswerth $x_0 = 0$ ein für alle Mal verzichten. Denn einerseits ist die Berechnung des ersterwähnten Werthes bei complicirteren Gleichungen gar nicht durchführbar; andererseits giebt es auch Fälle*), wo jener Anfangswerth ebenso unzulässig wird als vorhin der Anfangswerth $x_0 = 0$.

*) Z. B. bei der von uns gleich anfangs ausgeschlossenen Gleichung $x^n + x^p - c = 0$, wenn n ungerade, p gerade, $c < \bar{c}$.

f) Fall $n=2$, $p=1$.

Um auch ein Beispiel zu haben, in welchem c von der Einheit verschieden ist, betrachten wir den einfachsten Fall $r=\frac{n}{p}=2$, also die quadratische Gleichung

$$x^2-x-c = 0,$$

welche in

$$y=x^2=\varphi \quad \text{und} \quad y=x+c=\psi$$

zerfällt. Den Curven φ und ψ adjungiren sich die anderen

$$\eta=\xi^2-c=\Phi \quad \text{und} \quad \eta=\sqrt{\xi+c}=\Psi,$$

woraus zur Bestimmung der Schnittpunktsabscissen

$$(\xi^2-c)^2-(\xi+c)=\xi^4-2c\xi^2-\xi+c^2-c=0$$

abgeleitet wird, und dieses lässt sich zerlegen wie folgt:

$$(\xi^2-\xi-c)(\xi^2+\xi-c+1) = 0.$$

Der erste Factor führt auf die Wurzeln der vorgelegten Gleichung zurück, der andere verschwindet für

$$\xi = -\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{c-\tfrac{3}{4}}$$

und liefert die beiden Anfangsabscissen x_0 und x_1 des indifferenten Umlaufes, welch letzterer aus einem Quadrat mit der Seite

$$x_1-x_0 = 2\sqrt{c-\tfrac{3}{4}}$$

besteht.

Für $c=\frac{3}{4}$ verschwindet jener Umlauf, er hat sich dann in den einen Schnittpunkt der Parabel φ mit der Geraden ψ verdichtet, und es wird

$$x_0=x_1=\bar{x}=-\tfrac{1}{2}.$$

Für $c=1$ erscheint das bekannte Quadrat mit der Seite 1, und es wird $x_0=-1$, $x_1=0$; dasselbe nimmt unter allen möglichen die tiefste Stelle ein. — Wächst c ins Unbegrenzte, so nimmt das Quadrat unendliche Dimensionen an und erhebt sich zugleich in das oberhalb der x-Axe gelegene unendlich ferne Gebiet. — Das in Fig. 10 auftretende Quadrat entspricht einem $c=3$, so dass $x_0=-2$, $x_1=1$ und die Seite 3 beträgt.

g) Die transcendente trinomische Gleichung.

Unter dieser Gleichung verstehen wir die Form

$$z^n \pm az^p \pm b = 0, \qquad (n>p) \tag{34.}$$

in welcher a, b, n und p gegebene *positive*, auch *irrationale* Zahlen bedeuten.

Wir unterscheiden also nicht mehr, ob n und p gerade oder ungerade ist, und gedenken dadurch eine Vereinfachung in der Classification zu erzielen, besonders auch, wenn die Gleichung wie früher algebraisch ist.

Es möge nur nach den *positiven* Wurzeln gefragt werden; die etwa vorhandenen negativen können durch die Substitution $z = -z_1$ in positive umgesetzt werden. Bemerkt sei, dass die Gleichung (34.) höchstens *drei* reelle Wurzeln haben kann. Unter den vier Formen, welche die Gleichung für die verschiedenen Vorzeichencombinationen annimmt, fällt sonach die *erste* aus, denn dieser kann ein positiver Werth nicht genügen*).

Wir substituiren wie früher

$$z = a^{\frac{1}{n-p}} x^{\frac{1}{p}}, \quad b.a^{-\frac{n}{n-p}} = c, \quad \frac{n}{p} = r, \qquad (r > 1)$$

und erhalten

(35.) $$x^r \pm x - c = 0.$$

Hier ist r eine beliebige *positive,* auch *irrationale* Zahl, c gilt, da das Doppelzeichen durch ein einziges ersetzt wurde, als beliebig *positiv* oder *negativ,* und von jetzt ab sind nur noch *zwei* Hauptfälle, je nach dem Vorzeichen von x, zu unterscheiden.

Wir spalten die Gleichung (35.) wie sonst in

(36.) $$y = x^r = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = c \pm x = \psi(x)$$

und wenden auf das Curvensystem φ, ψ die früher auseinandergesetzten Principien an. Es genügt, von der transcendenten Parabel φ nur *einen* Zweig zu betrachten, nämlich den, welcher nur *positive* Coordinaten besitzt, und so gelangen wir durch Verknüpfung aller Einzelheiten zur Darstellung der *reellen* Wurzeln obiger trinomischen Gleichung in allen denkbaren Fällen. — Hierzu nachstehende tabellarische Uebersicht.

1) Gleichung: $x^r + x - c = 0.$

Reelle Lösungen:

$$\begin{cases} x' = c - \sqrt[\frac{1}{r}]{c - \cdots \sqrt{c - x_0^r}}, \\ x'' = \sqrt[r]{c - \sqrt[r]{c - \cdots \sqrt[r]{c - x_0}}}. \end{cases}$$

*) Die gleichen Bestimmungen trifft ***Gauss*** bei seiner Bearbeitung der trinomischen Gleichung. — Siehe „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen," Werke, Bd. 3.

Convergenzbedingungen:	Positive Lösungen:	Anfangsabscissen:
$c < 0$	Keine	
$0 < c < \bar{c}$	Eine: $x = x'$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = \bar{x}$
$c = \bar{c}$	Eine: $x = \bar{x}$	
$c > \bar{c}$	Eine: $x = x''$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = \bar{x}$.

Hier bedeutet $\bar{x}$ die Abscisse des supplementaren Schnitts und $\bar{c}$ das zugehörige c. Es ist

$$\bar{x} = r^{-\frac{1}{r-1}}, \quad \bar{c} = \frac{r+1}{r} \cdot \bar{x}.$$

2) Gleichung: $x^r - x - c = 0$.

Reelle Lösungen:

$$\begin{cases} x' = -c + \sqrt[\frac{1}{r}]{-c + \cdots \sqrt[\frac{1}{r}]{-c + x_0^r}}, \\ x'' = \sqrt[r]{c + \sqrt[r]{c + \cdots \sqrt[r]{c + x_0}}}. \end{cases}$$

Convergenzbedingungen:	Positive Lösungen:	Anfangsabscissen:
$c < c^{(0)}$	Keine	
$c = c^{(0)}$	Zwei gleiche: $x = x^{(0)}$	
$0 > c > c^{(0)}$	Zwei: $\left\{\begin{matrix} x = x' & \text{(kleinere)} & x_0 = 0 \\ x = x'' & \text{(grössere)} & x_0 = 1 \end{matrix}\right\}$	oder $x_0 = x^{(0)}$
$c > 0$	Eine: $x = x''$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = x^{(0)}$.

Hier bedeutet $x^{(0)}$ die Abscisse des Berührungspunktes und $c^{(0)}$ das zugehörige c. Es ist

$$x^{(0)} = r^{-\frac{1}{r-1}}, \quad c^{(0)} = -\frac{r-1}{r} \cdot x^{(0)}.$$

III. *Die Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen.*

a) Gleichungen mit mehreren Parametern.

Die Methode der An- und Umläufe kann auch auf Gleichungen mit mehreren Parametern ausgedehnt werden und führt insbesondere zu einer

befriedigenden Auflösung der Gleichung vierten und fünften Grades, wenn *nur* die *reellen* Wurzeln verlangt werden. Bei der Gleichung sechsten Grades muss man, falls die Ausführung der Rechnung nicht zu umständlich werden soll, voraussetzen, dass die Glieder mit x^5 und x^3 oder mit x^5 und x^2 fehlen, was übrigens durch quadratische Transformation immer erreichbar ist.

Die Beschränkungen, die wir uns in der Folge auferlegen müssen, sind, wie bemerkt, durch die praktische Ausführbarkeit der Methode selbst bedingt. Denn da die Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x)-\psi(x) = 0 \tag{8.}$$

verlangt, dass nicht nur die Funktionen φ und ψ, sondern auch die inversen φ^{-1} und ψ^{-1} für ein gegebenes Argument berechnet werden, so kann man für jene Functionen in praxi nur solche zulassen, welche entweder tabellirt sind, wie etwa *Logarithmen, goniometrische* und *hyperbolische Functionen,* oder welche an sich leicht ausgewerthet werden können, wie die *Potenz* (im allgemeinsten Sinn) und die ganze Function *ersten* und *zweiten* Grades. Darüber hinauszugehen, ist nicht mehr zweckmässig.

Ich habe in meiner früheren diesbezüglichen Untersuchung (A.) auf die Auflösung der Gleichung

$$\log x \pm mx = 0$$

aufmerksam gemacht, sowie die Wurzeln der Gleichungen*)

$$x^{2n} - \alpha x^n - \beta x - \gamma = 0,$$
$$x^n - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0,$$
$$x^{2n+1} - \alpha x^{n+1} - \beta x - \gamma = 0$$

unter Voraussetzung bestimmt gegebener, numerischer Parameter durch Kettenfunctionen dargestellt, wozu *nur* zweite und *n*te Wurzeln erforderlich waren.

Betreffs der Gleichungen *sechsten* Grades sei hier hinzugefügt, dass man sie in der Form

$$(x^2 \pm 1)^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^3,$$

d. h.

$$x^6 \pm 3x^4 - (\alpha - 3)x^2 - \beta x - (\gamma \pm 1) = 0$$

---

*) Für $n = 2$ wird die erste dieser Gleichungen vom vierten Grade, und die zugehörige Kette

$$x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{a \pm \cdots}}}$$

vermag bei entsprechendem Vorzeichenwechsel sämmtliche vier Wurzeln darzustellen, wenn selbige reell sind. — Vergl. a. a. O.

Convergenzbedingungen:	Positive Lösungen:	Anfangsabscissen:
$c < 0$	Keine	
$0 < c < \bar{c}$	Eine: $x = x'$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = \bar{x}$
$c = \bar{c}$	Eine: $x = \bar{x}$	
$c > \bar{c}$	Eine: $x = x''$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = \bar{x}$.

Hier bedeutet $\bar{x}$ die Abscisse des supplementaren Schnitts und $\bar{c}$ das zugehörige c. Es ist

$$\bar{x} = r^{-\frac{1}{r-1}}, \quad \bar{c} = \frac{r+1}{r} \cdot \bar{x}.$$

2) Gleichung: $x^r - x - c = 0$.

Reelle Lösungen:

$$\begin{cases} x' = -c + \sqrt[\frac{1}{r}]{-c + \cdots \sqrt[\frac{1}{r}]{-c + x_0^r}}, \\ x'' = \sqrt[r]{c + \sqrt[r]{c + \cdots \sqrt[r]{c + x_0}}}. \end{cases}$$

Convergenzbedingungen:	Positive Lösungen:	Anfangsabscissen:
$c < c^{(0)}$	Keine	
$c = c^{(0)}$	Zwei gleiche: $x = x^{(0)}$	
$0 > c > c^{(0)}$	Zwei: $\left\{\begin{matrix} x = x' & \text{(kleinere)} & x_0 = 0 \\ x = x'' & \text{(grössere)} & x_0 = 1 \end{matrix}\right\}$	oder $x_0 = x^{(0)}$
$c > 0$	Eine: $x = x''$	$x_0 = 0$ oder $x_0 = x^{(0)}$.

Hier bedeutet $x^{(0)}$ die Abscisse des Berührungspunktes und $c^{(0)}$ das zugehörige c. Es ist

$$x^{(0)} = r^{-\frac{1}{r-1}}, \quad c^{(0)} = -\frac{r-1}{r} \cdot x^{(0)}.$$

III. *Die Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen.*

a) Gleichungen mit mehreren Parametern.

Die Methode der An- und Umläufe kann auch auf Gleichungen mit mehreren Parametern ausgedehnt werden und führt insbesondere zu einer

befriedigenden Auflösung der Gleichung vierten und fünften Grades, wenn *nur* die *reellen* Wurzeln verlangt werden. Bei der Gleichung sechsten Grades muss man, falls die Ausführung der Rechnung nicht zu umständlich werden soll, voraussetzen, dass die Glieder mit x^5 und x^3 oder mit x^5 und x^2 fehlen, was übrigens durch quadratische Transformation immer erreichbar ist.

Die Beschränkungen, die wir uns in der Folge auferlegen müssen, sind, wie bemerkt, durch die praktische Ausführbarkeit der Methode selbst bedingt. Denn da die Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x)-\psi(x) = 0 \tag{8.}$$

verlangt, dass nicht nur die Funktionen φ und ψ, sondern auch die inversen φ^{-1} und ψ^{-1} für ein gegebenes Argument berechnet werden, so kann man für jene Functionen in praxi nur solche zulassen, welche entweder tabellirt sind, wie etwa *Logarithmen, goniometrische* und *hyperbolische Functionen*, oder welche an sich leicht ausgewerthet werden können, wie die *Potenz* (im allgemeinsten Sinn) und die ganze Function *ersten* und *zweiten* Grades. Darüber hinauszugehen, ist nicht mehr zweckmässig.

Ich habe in meiner früheren diesbezüglichen Untersuchung (A.) auf die Auflösung der Gleichung

$$\log x \pm mx = 0$$

aufmerksam gemacht, sowie die Wurzeln der Gleichungen*)

$$\begin{aligned} x^{2n} &- \alpha x^n &- \beta x - \gamma &= 0, \\ x^n &- \alpha x^2 &- \beta x - \gamma &= 0, \\ x^{2n+1} &- \alpha x^{n+1} &- \beta x - \gamma &= 0 \end{aligned}$$

unter Voraussetzung bestimmt gegebener, numerischer Parameter durch Kettenfunctionen dargestellt, wozu *nur* zweite und *n*te Wurzeln erforderlich waren.

Betreffs der Gleichungen *sechsten* Grades sei hier hinzugefügt, dass man sie in der Form

$$(x^2 \pm 1)^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^3,$$

d. h.

$$x^6 \pm 3x^4 - (\alpha - 3)x^2 - \beta x - (\gamma \pm 1) = 0$$

---

*) Für $n = 2$ wird die erste dieser Gleichungen vom vierten Grade, und die zugehörige Kette

$$x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b \pm \sqrt{a \pm \cdots}}}$$

vermag bei entsprechendem Vorzeichenwechsel sämmtliche vier Wurzeln darzustellen, wenn selbige reell sind. — Vergl. a. a. O.

voraussetzen kann, denn diese unterscheidet sich von

$$z^6 - p_2 z^4 - p_4 z^2 - p_5 z - p_6 = 0$$

nur unwesentlich. Hier kommen die Curven

$$y = x^2 \pm 1 \quad \text{und} \quad y = \sqrt[3]{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

in Betracht. — Für eine vollständigere Gleichung sechsten Grades, in welcher *nur* $p_1 = 0$, handelt es sich um die Intersection eines *allgemeinen* Kegelschnitts $K(x, y) = 0$ mit einer kubischen Parabel $y = x^3$.

Es liegt nun nahe zu untersuchen, ob nicht jene algebraischen Ausdrücke durch Einführung goniometrischer Functionen zur logarithmischen Berechnung geeigneter gemacht werden können. In der That zeigt sich, dass gewisse *Normalformen* der Gleichungen vierten, fünften und sechsten Grades nach Vergleichung mit den Formeln für $\cos n\omega$, $(n = 4, 5, 6)$ eine derartige Umgestaltung zulassen, dass die *reelle* Auflösung derselben durch wiederholtes Aufschlagen der trigonometrischen Tafeln erfolgen kann. Die ausserdem hinzutretenden hyperbolischen Functionen haben dabei keine principielle Bedeutung; sie dienen zur Erledigung der Fälle, in denen das Argument der goniometrischen Functionen imaginär ausfallen würde.

Der eben bezeichnete Gegenstand kann nun an diesem Orte keineswegs erschöpfend behandelt werden. Wir begnügen uns mit einer kurzen Skizze und erweisen die praktische Brauchbarkeit der Formeln an einigen numerischen Beispielen. Indessen soll hiermit nicht etwa gesagt sein, dass die Discussion der Kettenlösungen für die zu behandelnden Gleichungen überflüssig sei. Man hat vielmehr der elementaren analytischen Geometrie die Aufgabe zuzuweisen, die Berührungsstellen, supplementaren Schnitte und möglicherweise vorhandenen indifferenten Umläufe zweier transcendenten Curven, wie etwa

$$y = \cos x \quad \text{und} \quad y = a\cos\frac{x}{n} + b$$

aufzusuchen. Das Endergebniss hat in einer *tabellarischen Uebersicht* zu bestehen, welcher die reellen Wurzeln der Gleichung in Gestalt convergenter Ketten entnommen werden können, wie wir das für die trinomische Gleichung ausgeführt haben.

b) Die Gleichung vierten Grades.

Die Gleichung

(37.) $$z^4 - p_2 z^2 - p_3 z - p_4 = 0$$

kann mittelst $z = \varrho v$ auf eine der Formen

(38.) $$8v^4 \mp 8v^2 - \alpha v - \beta = 0$$

gebracht werden, und zwar ist

(39.) $$\varrho = \sqrt{\pm p_2}, \quad \alpha = 8p_3\varrho^{-3}, \quad \beta = 8p_4\varrho^{-4}, \qquad (p_2 \gtrless 0).$$

Damit ϱ reell werde, ist das obere, resp. untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem p_2 positiv oder negativ ist. Alle vorkommenden Constanten sind zunächst *beliebige positive* oder *negative* Zahlen.

Im *ersten* Falle substituire man in

(38ª.) $$8v^4 - 8v^2 - \alpha v - \beta = 0$$

(40.) $$\alpha)\ v = \cos\frac{x}{4} \quad \text{oder} \quad \beta)\ v = \mathfrak{Cos}\frac{x}{4}\ ^*)$$

und wende die Formel

$$8\cos^4\frac{x}{4} - 8\cos^2\frac{x}{2} + 1 = \cos x,$$

resp.

$$8\mathfrak{Cos}^4\frac{x}{4} - 8\mathfrak{Cos}^2\frac{x}{4} + 1 = \mathfrak{Cos}x$$

an, dann ergiebt sich

(41ª.) $$\cos x - \alpha\cos\frac{x}{4} - (\beta+1) = 0,$$

(41$^\beta$.) $$\mathfrak{Cos}x - \alpha\,\mathfrak{Cos}\frac{x}{4} - (\beta+1) = 0.$$

Diese Gleichungen spalten wir in

(42ª.) $$y = \cos x = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = a\cos\frac{x}{4} + b = \psi(x),$$

resp.

(42$^\beta$.) $$y = \mathfrak{Cos}x = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = a\,\mathfrak{Cos}\frac{x}{4} + b = \psi(x),$$

wobei $\alpha = a$, $\beta + 1 = b$ gesetzt wurde.

Im *zweiten* Falle substituire man in

(38ᵇ.) $$8v^4 + 8v^2 - \alpha v - \beta = 0$$

(43.) $$v = \mathfrak{Sin}\frac{x}{4}$$

und benutze die Formel

$$8\mathfrak{Sin}^4\frac{x}{4} + 8\mathfrak{Sin}^2\frac{x}{4} + 1 = \mathfrak{Cos}x,$$

dann ergiebt sich

(44.) $$\mathfrak{Cos}x - \alpha\,\mathfrak{Sin}\frac{x}{4} - (\beta+1) = 0$$

---

*) $\mathfrak{Cos} = \cos\text{hyp.}$, $\mathfrak{Sin} = \sin\text{hyp.}$

oder gespalten,

$$(45.) \qquad y = \mathfrak{Cos}\, x = \varphi(x), \quad y = a\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{4} + b = \psi(x),$$

unter a und b die erwähnten Zahlen verstanden.

Die Untersuchung der drei Curvensysteme (42^{α}.), (42^{β}.) und (45.) führt nun zur Darstellung der reellen Wurzeln der Gleichungen (38^{a}.) und (38^{b}.) durch Ketten, und zwar erledigen sich alle Fälle entweder in der Form

$$x = [\varphi^{-1}\psi x_0]^{(k)} \quad \text{oder} \quad x = [\psi^{-1}\varphi x_0]^{(k)}.$$

Betrachten wir *nur* die erste, so haben wir für (42^{α}.) Folgendes: Aus $\cos x = y$ berechnet sich

$$x = 2m\pi + \vartheta, \qquad (m = 0, 1, 2, 3)$$

unter ϑ den kleinsten der in Frage kommenden Bogen verstanden; alsdann ergiebt sich

$$y = a\cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\vartheta}{4}\right) + b.$$

Wir können daher die vier reellen Wurzeln der Gleichung

$$(38^{a}.) \qquad 8v^4 - 8v^2 - \alpha v - \beta = 0$$

durch das Kettenschema

$$(46.) \qquad \begin{cases} \vartheta_0 = 0, \\ y = av + b, \\ \cos\vartheta = y \end{cases} \qquad (a = \alpha,\ b = \beta + 1)$$

darstellen, worin

$$(47.) \qquad v = \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\vartheta}{4}\right), \qquad (m = 0, 1, 2, 3)$$

oder, nach Trennung der verschiedenen Fälle,

$$(48.) \qquad \text{a) } v = \cos\frac{\vartheta}{4}, \quad \text{b) } v = -\sin\frac{\vartheta}{4}, \quad \text{c) } v = -\cos\frac{\vartheta}{4}, \quad \text{d) } v = \sin\frac{\vartheta}{4}.$$

Will man also die durch $v = \cos\frac{\vartheta}{4}$ angezeigte Wurzel bestimmen, so hat man diesen Werth v in die zweite der Gleichungen (46.) einzutragen. Die Kette beginnt sodann mit dem Anfangswerth $\vartheta_0 = 0$, für diesen ergiebt sich ein y_0, und zu diesem y_0 liefert die dritte der Gleichungen (46.) ein gewisses ϑ_1, dann folgt aus der zweiten ein zugehöriges y_1 u. s. f. — Sobald zwei aufeinander folgende ϑ oder y hinreichend wenig von einander abweichen, ist der Process beendet, und das zuletzt berechnete ϑ ergiebt vermöge (48^{a}.) die gewünschte Wurzel.

Eine Störung der Kette erfolgt, wenn y ein *unechter* Bruch wird, und das tritt ein, falls $a+b$ oder b die Einheit übersteigen. In diesem Falle kann aber die hyperbolische Kette

$$(49.)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= 0,\\ y &= av+b,\\ \mathfrak{Cos}x &= y \end{aligned}\right. \qquad (a=a,\ b=\beta+1)$$

gebraucht werden, worin

$$(50.)\qquad v = \mathfrak{Cos}\frac{x}{4}.$$

Da die Function $\mathfrak{Cos}$ wesentlich *positiv* ist, so würde eine etwaige negative Wurzel der Gleichung (38ª.) ausfallen. Um dies zu vermeiden, betrachte man neben (38ª.) auch jene Gleichung, welche aus dieser hervorgeht, wenn v mit $-v_1$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, a mit $-a$ vertauscht wird.

Liegt endlich die Gleichung

$$(38^b.)\qquad 8v^4+8v^2-\alpha v-\beta = 0$$

vor, so tritt die Kette

$$(51.)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= 0,\\ y &= av+b,\\ \mathfrak{Cos}x &= y, \end{aligned}\right. \qquad (a=a,\ b=\beta+1)$$

ein, worin

$$(52.)\qquad \text{a)}\ v = \mathfrak{Sin}\frac{x}{4},\quad \text{b)}\ v = -\mathfrak{Sin}\frac{x}{4}.$$

Hier ist zu bemerken, dass aus der dritten Gleichung von (51.) die *zweideutige* Function $x = \pm\mathfrak{Arc}\mathfrak{Cos}y$ hervorgeht, deren Doppelzeichen sich auf v überträgt.

Man gelangt daher entweder zu *zwei* reellen Lösungen oder überhaupt zu *keiner*, wie das auch in der Natur der Gleichung (38ᵇ.) liegt.

Für die logarithmische Berechnung der goniometrischen Ketten ist es zweckmässig, den Ausdruck

$$y = a\cos\frac{2m\pi+\vartheta}{n}+b$$

mittelst eines Hülfsarguments ω umzuformen. Man setze

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{a}{b}\sin\frac{2m\pi+\vartheta}{n}$$

und erhält

$$y = \frac{a}{\sin\omega} \cdot \sin\left(\omega + \frac{2m\pi + \vartheta}{n}\right).$$

Aehnliche Transformationen lassen die hyperbolischen Functionen zu.

c) Die Gleichung fünften Grades. (*Kronecker*sche Form.)

Dieselbe lautet

(53.) $$z^5 - p_2 z^3 - p_4 z - p_5 = 0$$

und geht mittelst $z = \varrho v$ über in

(54.) $$16v^5 \mp 20v^3 - \alpha v - \beta = 0,$$

wobei

(55.) $$\varrho = \sqrt{\pm \tfrac{4}{5} p_2}, \quad \alpha = 16 p_4 \varrho^{-4}, \quad \beta = 16 p_5 \varrho^{-5}. \qquad (p_2 \gtrless 0)$$

Nun substituiren wir in (54.) nach einander

(56.) $$\alpha)\ v = \cos\frac{x}{5}, \quad \beta)\ v = \mathfrak{Cos}\frac{x}{5}, \quad \gamma)\ v = \mathfrak{Sin}\frac{x}{5}$$

und vergleichen dies mit den Formeln

$$16\cos^5\frac{x}{5} - 20\cos^3\frac{x}{5} + 5\cos\frac{x}{5} = \cos x,$$

$$16\mathfrak{Cos}^5\frac{x}{5} - 20\mathfrak{Cos}^3\frac{x}{5} + 5\mathfrak{Cos}\frac{x}{5} = \mathfrak{Cos}x,$$

$$16\mathfrak{Sin}^5\frac{x}{5} + 20\mathfrak{Sin}^3\frac{x}{5} + 5\mathfrak{Sin}\frac{x}{5} = \mathfrak{Sin}x,$$

so entsteht nach Spaltung

(57^α.) $$\cos x = a\cos\frac{x}{5} + b = y,$$

(57^β.) $$\mathfrak{Cos}x = a\mathfrak{Cos}\frac{x}{5} + b = y,$$

(57^γ.) $$\mathfrak{Sin}x = a\mathfrak{Sin}\frac{x}{5} + b = y,$$

wobei $\alpha + 5 = a$, $\beta = b$ gesetzt wurde.

Diesen Curvensystemen entsprechen folgende Ketten:

α) Eine *goniometrische* (Fig. 11.)

(58.) $$\begin{cases} \vartheta_0 = 0, \\ y = av + b, \\ \cos\vartheta = y, \end{cases}$$

worin

$$(59.) \qquad v = \cos\left(\frac{2m\pi+\vartheta}{5}\right) \qquad (m = 0, 1, 2, 3, 4)$$

oder, wenn die Bogen durch Winkel ersetzt werden, und nach Trennung der verschiedenen Fälle,

$$(60.) \quad \begin{cases} \text{a)}\ v = \cos\frac{\vartheta}{5}, & \text{b)}\ v = \sin\left(18^0-\frac{\vartheta}{5}\right), \quad \text{c)}\ v = -\cos\left(36^0-\frac{\vartheta}{5}\right), \\ & \text{d)}\ v = -\cos\left(36^0+\frac{\vartheta}{5}\right), \quad \text{e)}\ v = \sin\left(18^0+\frac{\vartheta}{5}\right). \end{cases}$$

β) Eine ***hyperbolische***

$$(61.) \quad \begin{cases} x_0 = 0, \\ y = av+b, \\ \mathfrak{Cos}x = y, \end{cases}$$

worin

$$(62.) \qquad v = \mathfrak{Cos}\frac{x}{5}.$$

Eben diese Kette kann auch eine ***negative*** Wurzel liefern, wenn zuvor in (54.) v mit $-v_1$, d. h. β mit $-\beta$ vertauscht worden ist.

γ) Eine zweite ***hyperbolische***

$$(63.) \quad \begin{cases} x_0 = 0, \\ y = av+b, \\ \mathfrak{Sin}x = y, \end{cases}$$

worin

$$(64.) \qquad v = \mathfrak{Sin}\frac{x}{5}.$$

Zur Orientirung denke man sich die beiden Sinuſoiden

$$y = a\mathfrak{Sin}\frac{x}{5}+b \quad \text{und} \quad y = \mathfrak{Sin}x$$

construirt, dann erkennt man, dass für ein ***negatives*** a stets ***ein*** Umlauf stattfindet; die Kette (oder ihre inverse) liefert dann ***eine*** reelle Wurzel.

Für ein ***positives*** a entstehen, je nach dem Vorzeichen der Discriminante, ***ein*** oder ***drei*** Schnittpunkte, welche sämmtlich nur durch Anläufe zu erreichen sind. Ist b gleichzeitig ***positiv***, so giebt obige Kette die ***positive*** Wurzel der Gleichung (54.) Die beiden etwa vorhandenen ***negativen*** Wurzeln dagegen verlangen eine Abänderung. Die absolut ***grössere*** wird zwar abermals durch die betreffende Kette dargestellt, jedoch mit ***neuer*** Anfangs-

abscisse $x_0 = x^{(0)}$, unter $x^{(0)}$ die Berührungsabscisse verstanden. Die absolut *kleinere* Wurzel hingegen ist durch die *inverse* Kette

$$(65.) \qquad \begin{cases} x_0 = x^{(0)}, \\ y = \mathfrak{Sin}\, x, \\ v = \dfrac{y-b}{a} \end{cases}$$

gegeben, worin

$$(66.) \qquad v = \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{5}.$$

Uebrigens ist hier auch die Anfangsabscisse $x_0 = 0$ wieder zulässig.

Ist b ***negativ***, so vertausche man in (54.) v mit $-v_1$.

Zahlenbeispiel für die goniometrische Kette.

Es sei $a = 0{,}18$; $b = 0{,}64$; dann ergeben sich die fünf reellen Wurzeln der Gleichung

$$16v^5 - 20v^3 - \alpha v - \beta = 0 \qquad (\alpha = a-5,\ \beta = b)$$

durch nachstehende Tabellen:

(1)

$\cos\vartheta = y$	$y = a\cos\dfrac{\vartheta}{5} + b$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}82$
$\vartheta_1 = 34^0\ 55''$	$y_1 = 0{,}818665$
$\vartheta_2 = 35^0\ 3'\ 0''$	$y_2 = 0{,}8186545$
$\vartheta_3 = 35^0\ 2'\ 58{,}79''$	$y_3 = 0{,}8186545.$

Mithin ist die *erste* Wurzel

$$v = \cos\frac{\vartheta}{5} = 0{,}9925250.$$

(2)

$\cos\vartheta = y$	$y = a\sin\left(18^0 - \dfrac{\vartheta}{5}\right) + b$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}6956$
$\vartheta_1 = 45^0\ 55'$	$y_1 = 0{,}6676$
$\vartheta_2 = 48^0\ 7'\ 10''$	$y_2 = 0{,}666217$
$\vartheta_3 = 48^0\ 13'\ 30''$	$y_3 = 0{,}666157$
$\vartheta_4 = 48^0\ 13'\ 43{,}01''$	$y_4 = 0{,}6661528$
$\vartheta_5 = 48^0\ 13'\ 45{,}01''$	$y_5 = 0{,}6661525$
$\vartheta_6 = 48^0\ 13'\ 45{,}11''$	$y_6 = 0{,}6661525.$

Die *zweite* Wurzel wird

$$v = \sin\left(18^0 - \frac{\vartheta}{5}\right) = 0{,}1452915.$$

(3)

$\cos\vartheta = y$	$y = -a\cos\left(36^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) + b$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}49$
$\vartheta_1 = 60^0\ 22'$	$y_1 = 0{,}5197$
$\vartheta_2 = 58^0\ 41'\ 10''$	$y_2 = 0{,}51894$
$\vartheta_3 = 58^0\ 44'\ 20''$	$y_3 = 0{,}5189688$
$\vartheta_4 = 58^0\ 44'\ 12{,}8''$	$y_4 = 0{,}5189678$
$\vartheta_5 = 58^0\ 44'\ 12{,}02''$	$y_5 = 0{,}5189679.$

Die *dritte* Wurzel wird

$$v = -\cos\left(36^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) = -0{,}6724005.$$

(4)

$\cos\vartheta = y$	$y = -a\cos\left(36^0 - \frac{\vartheta}{5}\right) + b$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}49$
$\vartheta_1 = 60^0\ 22'$	$y_1 = 0{,}4755$
$\vartheta_2 = 61^0\ 36'\ 40''$	$y_2 = 0{,}47516$
$\vartheta_3 = 61^0\ 37'\ 50''$	$y_3 = 0{,}47515$
$\vartheta_4 = 61^0\ 37'\ 51{,}18''$	$y_4 = 0{,}4751477$
$\vartheta_5 = 61^0\ 37'\ 51{,}72''$	$y_5 = 0{,}4751477.$

Die *vierte* Wurzel wird

$$v = -\cos\left(36^0 - \frac{\vartheta}{5}\right) = -0{,}9158464.$$

(5)

$\cos\vartheta = y$	$y = a\sin\left(18^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) + b$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}6956$
$\vartheta_1 = 45^0\ 55'$	$y_1 = 0{,}7222$
$\vartheta_2 = 43^0\ 45'$	$y_2 = 0{,}721024$
$\vartheta_3 = 43^0\ 51'\ 39''$	$y_3 = 0{,}721084$
$\vartheta_4 = 43^0\ 51'\ 21{,}4''$	$y_4 = 0{,}7210772$
$\vartheta_5 = 43^0\ 51'\ 23{,}4''$	$y_5 = 0{,}7210774.$

Die *fünfte* Wurzel wird

$$v = \sin\left(18^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) = 0{,}4504304.$$

Die Controlrechnung $\Sigma v = 0$ und $\Sigma v^3 = 0$ bestätigt in der That die Richtigkeit der fünf angegebenen Wurzeln bis zur *siebenten* Decimale.

d) Die allgemeine Gleichung fünften Grades.

Wir setzen dieselbe in der reducirten Form

$$z^5 - p_2 z^3 - p_3 z^2 - p_4 z - p_5 = 0$$

voraus, und da sie sich nunmehr von der *Kronecker*schen Form nur durch das Vorhandensein der zweiten Potenz z^2 unterscheidet, so führt die im vorigen Abschnitt benutzte Transformation $z = \varrho v$ zu drei Gleichungen der Form

$$(68.) \quad f(x) = Af^2\left(\frac{x}{5}\right) + Bf\left(\frac{x}{5}\right) + C, \quad \text{(vergl. } (57^{\alpha}.), (57^{\beta}.), (57^{\gamma}.)\text{)}$$

wobei die A, B, C nur von den Coefficienten p abhängen und f der Reihe nach die Functionen cos, Cos und Sin bezeichnet. Die letzte Gleichung forme man um in

$$(69.) \qquad f(x) = a\left(b + f\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2 + c,$$

so dass

$$(70.) \qquad a = A, \quad b = B : 2A, \quad c = (4AC - B^2) : 4A, \qquad (A \gtrless 0)$$

und nun spalte man wie folgt

$$(71.) \qquad \begin{cases} y = \left(b + f\left(\frac{x}{5}\right)\right)^2, \\ f(x) = ay + c. \end{cases}$$

Dieses (resp. die inverse Form) ist bereits das in Frage kommende Kettenschema. — Greifen wir nur die *goniometrische* Kette heraus, so erhalten wir

$$(72.) \qquad \begin{cases} \vartheta_0 = 0, \\ y = (b + v)^2, \\ \cos\vartheta = ay + c, \end{cases}$$

worin

$$(73.) \qquad v = \cos\left(\frac{2m\pi + \vartheta}{5}\right). \qquad (m = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Die weitere Untersuchung unterscheidet sich von der bei der *Kronecker*schen

Form besonders dadurch, dass die Curve

$$y = \left(b+\cos\frac{\vartheta}{5}\right)^2$$

keine einfache Cosinusoide mehr ist. Der Verlauf jener Curve ist für $b>1$ sehr einfach; für $b<1$ muss aber berücksichtigt werden, dass selbige periodisch gegen die Abscissenaxe culminirt.

Zahlenbeispiel für die goniometrische Kette.

Es sei $a=0{,}015$; $b=1{,}20$; $c=0{,}40$; dann ergeben sich die fünf reellen Wurzeln der Gleichung

$$16v^5-20v^3+5v \;=\; a(b+v)^2+c,$$

d. h.

$$16v^5-20v^3-0{,}015v^2+4{,}964v-0{,}4216 \;=\; 0$$

durch nachstehende Tabellen:

(1)

$\cos\vartheta = ay+c$	$y=\left(b+\cos\frac{\vartheta}{5}\right)^2$
$\vartheta_0 = 0^0\ \ 0'$	$y_0 = 4{,}84$
$\vartheta_1 = 61^0\,48'$	$y_1 = 4{,}73856$
$\vartheta_2 = 61^0\,53'\,44{,}4''$	$y_2 = 4{,}7382463$
$\vartheta_3 = 61^0\,53'\,45{,}55''$	$y_3 = 4{,}7382411$
$\vartheta_4 = 61^0\,53'\,45{,}56''$	$y_4 = 4{,}7382411.$

Mithin ist die *erste* reelle Wurzel

$$v = \cos\frac{\vartheta}{5} = 0{,}9767502.$$

(2)

$\cos\vartheta = ay+c$	$y=\left(b+\sin\left(18^0-\frac{\vartheta}{5}\right)\right)^2$
$\vartheta_0 = \ \ 0^0\ 0'$	$y_0 = 2{,}277$
$\vartheta_1 = 64^0\,16'$	$y_1 = 1{,}6633$
$\vartheta_2 = 64^0\,51'\,10''$	$y_2 = 1{,}6582$
$\vartheta_3 = 64^0\,51'\,26{,}7''$	$y_3 = 1{,}658045$
$\vartheta_4 = 64^0\,51'\,27{,}07''$	$y_4 = 1{,}6580457$
$\vartheta_5 = 64^0\,51'\,27{,}08''$	$y_5 = 1{,}6580458.$

Die *zweite* Wurzel wird

$$v = \sin\left(18^0 - \frac{\vartheta}{5}\right) = 0{,}0876512.$$

(3)

$\cos\vartheta = ay + c$	$y = \left(b - \cos\left(36^0 + \frac{\vartheta}{5}\right)\right)^2$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}153$
$\vartheta_1 = 66^0\ 17'$	$y_1 = 0{,}29955$
$\vartheta_2 = 66^0\ 8'\ 26{,}3''$	$y_2 = 0{,}2991554$
$\vartheta_3 = 66^0\ 8'\ 27{,}58''$	$y_3 = 0{,}2991565$
$\vartheta_4 = 66^0\ 8'\ 27{,}57''$	$y_4 = 0{,}2991564.$

Die *dritte* Wurzel wird

$$v = -\cos\left(36^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) = -0{,}6530480.$$

(4)

$\cos\vartheta = ay + c$	$y = \left(b - \cos\left(36^0 - \frac{\vartheta}{5}\right)\right)^2$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 0{,}153$
$\vartheta_1 = 66^0\ 17'$	$y_1 = 0{,}07715$
$\vartheta_2 = 66^0\ 21'\ 0''$	$y_2 = 0{,}0770973$
$\vartheta_3 = 66^0\ 20'\ 58{,}22''$	$y_3 = 0{,}0770976$
$\vartheta_4 = 66^0\ 20'\ 58{,}22''$	$y_4 = 0{,}0770976.$

Die *vierte* Wurzel wird

$$v = -\cos\left(36^0 - \frac{\vartheta}{5}\right) = -0{,}9223354.$$

(5)

$\cos\vartheta = ay + c$	$y = \left(b + \sin\left(18^0 + \frac{\vartheta}{5}\right)\right)^2$
$\vartheta_0 = 0^0\ 0'$	$y_0 = 2{,}277$
$\vartheta_1 = 64^0\ 16'$	$y_1 = 2{,}9337$
$\vartheta_2 = 63^0\ 38'\ 30''$	$y_2 = 2{,}9272$
$\vartheta_3 = 63^0\ 38'\ 50''$	$y_3 = 2{,}9274685$
$\vartheta_4 = 63^0\ 38'\ 45{,}30''$	$y_4 = 2{,}9274585$
$\vartheta_5 = 63^0\ 38'\ 46{,}53''$	$y_5 = 2{,}9274588$
$\vartheta_6 = 63^0\ 38'\ 46{,}53''$	$y_6 = 2{,}9274588.$

Die *fünfte* Wurzel wird

$$v = \sin\left(18^0 + \frac{\vartheta}{5}\right) = 0{,}510\,98\,19.$$

Die Controlrechnung $\Sigma v = 0$ zeigt, dass erst in der *siebenten* Decimale eine Abweichung um eine Einheit statt hat.

e) Die Gleichung sechsten Grades.

Die Gleichung

$$z^6 - p_2 z^4 - p_4 z^2 - p_5 z - p_6 = 0 \tag{74.}$$

kommt mittelst der Substitution $z = \varrho v$ immer zurück auf eine der folgenden drei Ketten:

$$y = (b+v)^2 \tag{75.}$$

und beziehentlich

$$(76.)\quad \begin{cases} \cos\vartheta = ay + c, \\ v = \cos\left(\dfrac{2m\pi+\vartheta}{6}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\, x = ay + c, \\ v = \mathfrak{Cos}\,\dfrac{x}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\, x = ay + c, \\ v = \mathfrak{Sin}\,\dfrac{x}{6}. \end{cases}$$

Dieselben können auch invers auftreten; der Anfangswerth ist stets noch beizufügen.

Der goniometrischen Kette entsprechen für $m = 0, 1, \ldots, 5$ insbesondere folgende Lösungen:

$$(77.)\quad \begin{cases} \text{a) } v = \cos\dfrac{\vartheta}{6}, & \text{b) } v = \sin\left(30^0 - \dfrac{\vartheta}{6}\right), & \text{c) } v = -\sin\left(30^0 + \dfrac{\vartheta}{6}\right), \\ \text{d) } v = -\cos\dfrac{\vartheta}{6}, & \text{e) } v = -\sin\left(30^0 - \dfrac{\vartheta}{6}\right), & \text{f) } v = \sin\left(30^0 + \dfrac{\vartheta}{6}\right) \end{cases}$$

mit dem Anfangswerth $\vartheta_0 = 0$.

Des weiteren vergleiche man die bei der Gleichung vierten und fünften Grades gemachten Bemerkungen.

Zahlenbeispiel für die goniometrische Kette.

Es sei $a = 0{,}016$; $b = 0{,}750$; $c = 0{,}480$; dann findet man für die sechs reellen Wurzeln der Gleichung

$$32v^6 - 48v^4 + 18v^2 - 1 = a(b+v)^2 + c,$$

d. h.

$$32v^6 - 48v^4 + 17{,}984v^2 - 0{,}024v - 1{,}489 = 0$$

in der Reihenfolge von (77.) die Werthe

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ v = \ \ 0{,}985\,7448; \quad \vartheta_4 = 58^0\ \ 6'\,56{,}70'',\\
&\text{b)}\ v = \ \ 0{,}341\,8527; \quad \vartheta_4 = 60^0\ \ 3'\,40{,}41'',\\
&\text{c)}\ v = -0{,}645\,6869; \quad \vartheta_3 = 61^0\,18'\,11{,}61'',\\
&\text{d)}\ v = -0{,}984\,1662; \quad \vartheta_4 = 61^0\,15'\,26{,}21'',\\
&\text{e)}\ v = -0{,}338\,9080; \quad \vartheta_4 = 61^0\ \ 8'\,16{,}27'',\\
&\text{f)}\ v = \ \ 0{,}641\,1636; \quad \vartheta_4 = 59^0\,16'\,18{,}66''.
\end{aligned}$$

Die beigefügten Winkel ϑ_k sind stets die *letzten* der entsprechenden, hier nicht mitgetheilten Tabellen, und der Index k giebt an, wie oft jeder Winkel corrigirt wurde oder kurz: die Anzahl der Perioden der Kette. — Die Controlrechnung $\Sigma v = 0$ und $\Sigma v^3 = 0$ bestätigt die Richtigkeit der sechs Wurzeln bis zur *siebenten* Decimale.

Anmerkung. Das bisher angewendete Verfahren ist einer Verallgemeinerung fähig, wenn man von Ketten wie

$$(78.)\qquad \begin{cases} \vartheta_0 = 0, \\ y = av+b, \\ \cos\vartheta = y, \end{cases}$$

worin

$$(79.)\qquad v = \cos\frac{2m\pi+p\vartheta}{n}, \qquad \left(\begin{smallmatrix} m=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1 \\ p<n \end{smallmatrix}\right)$$

ausgeht. Dieselben können zur Bestimmung der *complexen* Wurzeln gewisser reciproker Gleichungen benutzt werden.

Liegt nämlich vor

$$(80.)\qquad x^n+\frac{1}{x^n}-a\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)-2b = 0,$$

unter a, b gegebene reelle Zahlen verstanden, so setze man

$$(81.)\qquad x = \cos\frac{\vartheta}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\vartheta}{n},$$

dann entsteht

$$(82.)\qquad \cos\vartheta = a\cos\frac{p\vartheta}{n}+b = y,$$

d. h. die erwähnte Kette, aus welcher nun ϑ zu berechnen ist.

IV. *Steigerung der Convergenz.*

Die An- und Umläufe zwischen zwei Curven

$$(3.)\qquad y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = \psi(x)$$

zeigen, wie früher bemerkt, bisweilen eine schwache Convergenz. Diese lässt sich beträchtlich steigern, wenn man eine jener Curven durch die ebenfalls den Schnittpunkt enthaltende Curve

(83.) $$\chi = (y-\varphi)-\lambda(y-\psi) = 0$$

ersetzt, wo λ eine noch zu bestimmende Constante bedeutet. Setzen wir voraus, dass wir uns mittelst unserer gewöhnlichen Methode dem Schnittpunkt bereits genähert haben, also einen Näherungswerth $x = x_i$ besitzen, dann wird es zweckmässig sein, die neue Curve χ so auszuwählen, dass ihre Tangente, für $x = x_i$, *parallel der Abscissenaxe* werde, denn dieser Richtung schmiegen sich die horizontalen Strecken der Läufe am innigsten an (Fig. 12.).

Der Bedingung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_i} = 0 \quad \text{entspricht} \quad \varphi'(x_i)-\lambda\psi'(x_i) = 0,$$

und da hierdurch zugleich sichergestellt ist, dass der (horizontale) Lauf auf Curve χ beginnt, so ist die Kette

(84.) $$x_0 = x_i, \quad y = \frac{\varphi-\lambda\psi}{1-\lambda}, \quad x = \varphi^{-1} \quad \text{oder auch} \quad x = \psi^{-1}$$

sicher convergent; ihre inverse kommt gar nicht in Betracht.

Bisher wurde $\lambda = \frac{\varphi'(x_i)}{\psi'(x_i)}$ als unveränderlich gedacht; aber das Verfahren kann noch schärfer gehandhabt werden, wenn man x_i *veränderlich* nimmt und zwar für x_i immer den zuletzt ermittelten, genaueren Näherungswerth einträgt. Auf solche Weise kommt man nun auf die bekannte *Newton*sche Näherungsmethode zurück.

Um dies darzuthun, wähle man $\psi(x) = x$, dann gelangt man zur Kette

(85.) $$x_0 = x_i, \quad y_i = \frac{\varphi(x_i)-x_i\varphi'(x_i)}{1-\varphi'(x_i)}, \quad x_{i+1} = y_i,$$

und setzt man

$$\varphi(x)-x = f(x),$$

wo nun $f = 0$ die zu lösende Gleichung wird, so entsteht

(86.) $$x_{i+1} = \frac{x_i+f(x_i)-x_i(1+f'(x_i))}{-f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},$$

d. h. die *Newton*sche Formel*).

*) Das gleiche Resultat lässt sich auch durch Drehung der Abscissenaxe erreichen. — Vergl. Abhandl. (A).

Dieses Ergebniss legt die Frage nahe, inwieweit das frühere Verfahren überhaupt Berechtigung hat. — Hier ist wohl vom theoretischen Standpunkte aus vor allem zu bemerken, dass die einfachen Kettenfunctionen, auf welche die Theorie der An- und Umläufe führt, an sich Interesse gewähren, umsomehr, als sie in anderen Zweigen der Analysis, bei der Integration der Differenzengleichungen, bei der elementaren Berechnung von π u. s. f. auftreten. Die Convergenzbetrachtung solcher Functionen dürfte, rein analytisch geführt, beträchtliche Schwierigkeiten aufweisen, während die geometrischen Eigenthümlichkeiten der entsprechenden Läufe ganz evident sind.

Dann weiter: Die *Newton*sche Methode erstreckt sich auf alle Gleichungen ganz gleichmässig; die hier mitgetheilte ist dem besonderen Falle aber besonders angepasst. Daher kann sie auch Gebrauch von den speciellen Eigenschaften der Functionen, wie z. B. der Periodicität machen. Die Formel von *Newton* repräsentirt ebenfalls eine Kettenfunction, welche aus f und f' construirt wird; bei der unsrigen ist f gespalten in $\varphi - \psi$, so dass sich die Betrachtung einfacheren Gebilden zuwenden kann. Dass endlich die Methode der An- und Umläufe praktisch brauchbar ist, zeigen wohl die angeführten numerischen Beispiele. — Bei schwacher Convergenz wird man allerdings auf *Newton*s Formel zurückgreifen, aber hiermit geht man nicht zu fremdartigen Betrachtungen über, denn jene Formel schliesst sich unserer Methode naturgemäss an.

Chemnitz, December 1893.

Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Eine nicht homogene quadratische Form von n Variablen

$$F = a + 2\sum_{k=0}^{n} b_{0k}x_k + \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}x_i x_k$$

stellt gleich Null gesetzt eine Oberfläche zweiter Ordnung im n-dimensionalen Raume dar. Zwei Oberflächen dieser Art:

$$F = 0, \quad \bar{F} = 0$$

sind dann und nur dann identisch, d. h. enthalten dieselben Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, wenn die beiden Formen F und $\bar{F}$ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, d. h. wenn:

$$\bar{F} = \alpha F$$

ist, wo α eine positive oder eine negative Constante ist. — Zwei Oberflächen

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \bar{F}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$$

sollen in eine Klasse gerechnet werden, wenn jede von ihnen in die andere durch eine reale *endliche* Coordinatentransformation übergeführt werden kann, d. h. wenn man eine umkehrbare lineare Transformation

$$x_i = \alpha_{i0} + \Sigma \alpha_{ik}\bar{x}_k$$

finden kann, durch welche F in ein Vielfaches von $\bar{F}$ übergeht; offenbar geht dann $\bar{F}$ durch die inverse Transformation in ein Vielfaches von F über. Dann entsprechen sich die im Endlichen liegenden Punkte beider Oberflächen eindeutig.

Nennt man zwei nicht homogene quadratische Formen F und $\bar{F}$ *äquivalent,* wenn die zugehörigen Oberflächen derselben Klasse angehören,

so fällt die Frage nach der Anzahl der Oberflächenklassen zusammen mit der nach der Klassenzahl der nicht äquivalenten quadratischen Formen.

Anstatt der Form F wollen wir ihr Coefficientensystem, d. h. das symmetrische System

$$\begin{Vmatrix} a, & b_{01}, & \ldots, & b_{0n} \\ b_{10}, & c_{11}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n0}, & c_{n1}, & \ldots, & c_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{oder kürzer} \quad \begin{pmatrix} a, & b_{0k} \\ b_{k0}, & c_{ik} \end{pmatrix}$$

betrachten, in welchem allgemein:

$$b_{0k} = b_{k0}, \quad c_{ik} = c_{ki}$$

ist, und zwei solche Systeme äquivalent nennen, wenn es die zugehörigen Formen sind, wenn also die durch sie dargestellten Oberflächen in dieselbe Klasse gehören.

Man kann nun jedes gegebene System in ein ihm äquivalentes reducirtes überführen, und dann den Nachweis führen, dass diese letzteren einander nicht äquivalent sind. Die Klassenanzahl aller Oberflächen zweiter Ordnung stimmt also mit derjenigen der reducirten Systeme überein, welche ihrerseits durch einfache Abzählung gefunden werden kann.

Ist $F(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige quadratische Form, $\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix}$ ihr Coefficientensystem, und macht man für $x_1, \ldots, x_n$ eine der folgenden elementaren und offenbar umkehrbaren Transformationen:

(a.) $$x_i = \gamma \bar{x}_i,$$

(b.) $$x_i = \bar{x}_k, \quad x_k = \bar{x}_i,$$

(c.) $$x_i = \bar{x}_i + t\bar{x}_k \quad \text{oder auch} \quad x_i = \bar{x}_i + t,$$

wo x_i, x_k irgend zwei der Variablen sind, und wo alle übrigen Variablen x_λ immer den entsprechenden $\bar{x}_\lambda$ gleichzusetzen sind, so geht jedesmal F in eine äquivalente Form $\bar{F}$ über. Beachtet man aber, welche Veränderung das Coefficientensystem bei jeder dieser drei Elementartransformationen erfährt, so ergiebt sich zunächst das folgende Resultat:

> Das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix}$ geht in ein äquivalentes über, wenn man irgend eine seiner n letzten Zeilen mit einer nicht verschwindenden Constanten γ multiplicirt, wenn man ferner irgend zwei der n letzten Zeilen mit einander vertauscht, und wenn man endlich zu

den Elementen irgend einer Zeile ein und dasselbe Vielfache der entsprechenden Elemente irgend einer der *n letzten* Zeilen hinzufügt, jedoch ist jedesmal die entsprechende Veränderung bei den Colonnen des Systemes ebenfalls vorzunehmen.

Jede dieser drei Veränderungen des Systemes $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ entspricht nämlich einer der in (1.) angegebenen Elementartransformationen der Variablen von F. — Man kann nun leicht zeigen, dass man nicht bloss die n letzten sondern auch die erste Zeile und die erste Colonne des Systems mit einer Constanten γ multipliciren darf. Betrachtet man nämlich die zu $F(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalente Form:

$$\gamma^2 . F(x_1, \ldots, x_n) = a.\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma^2 x_k + \Sigma\Sigma c_{ik}\gamma^2 x_i x_k$$

und setzt in ihr:

$$x_1 = \gamma\bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma\bar{x}_n,$$

so geht sie über in die äquivalente Form:

$$\bar{F} = a.\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma.\bar{x}_k + \Sigma c_{ik}\bar{x}_i\bar{x}_k,$$

deren Coefficientensystem $\binom{a\gamma^2,\ b\gamma}{b\gamma,\ c}$ aus dem ursprünglichen durch Multiplication seiner ersten Zeile und Colonne mit γ erhalten wird. Endlich kann man noch das ganze System mit -1 multipliciren, da alsdann nur die Form F durch die äquivalente $(-F)$ ersetzt wird. Fasst man diese letzten Resultate mit den vorher gefundenen zusammen, so ergiebt sich der Satz:

(A.) Das System $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ geht in ein äquivalentes über, wenn man eine seiner Zeilen mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicirt, oder zwei Zeilen vertauscht, oder ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addirt, und jedesmal dieselbe Operation bei den entsprechenden Colonnen ausführt; jedoch darf man die erste Zeile (und Colonne) weder mit einer späteren vertauschen, noch sie zu einer späteren addiren. Endlich kann man die Vorzeichen aller Elemente zugleich in die entgegengesetzten umwandeln.

Betrachtet man nun zunächst das symmetrische System (c_{ik}) für sich, so kann man dieses, wie bekannt und leicht zu erweisen ist, durch die elementaren und symmetrischen Veränderungen seiner Zeilen, welche in (A.) angegeben wurden, stets auf ein sogenanntes Diagonalsystem reduciren,

so fällt die Frage nach der Anzahl der Oberflächenklassen zusammen mit der nach der Klassenzahl der nicht äquivalenten quadratischen Formen.

Anstatt der Form F wollen wir ihr Coefficientensystem, d. h. das symmetrische System

$$\begin{Vmatrix} a, & b_{01}, & \ldots, & b_{0n} \\ b_{10}, & c_{11}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n0}, & c_{n1}, & \ldots, & c_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{oder kürzer} \quad \begin{pmatrix} a, & b_{0k} \\ b_{k0}, & c_{ik} \end{pmatrix}$$

betrachten, in welchem allgemein:

$$b_{0k} = b_{k0}, \quad c_{ik} = c_{ki}$$

ist, und zwei solche Systeme äquivalent nennen, wenn es die zugehörigen Formen sind, wenn also die durch sie dargestellten Oberflächen in dieselbe Klasse gehören.

Man kann nun jedes gegebene System in ein ihm äquivalentes reducirtes überführen, und dann den Nachweis führen, dass diese letzteren einander nicht äquivalent sind. Die Klassenanzahl aller Oberflächen zweiter Ordnung stimmt also mit derjenigen der reducirten Systeme überein, welche ihrerseits durch einfache Abzählung gefunden werden kann.

Ist $F(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige quadratische Form, $\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix}$ ihr Coefficientensystem, und macht man für $x_1, \ldots, x_n$ eine der folgenden elementaren und offenbar umkehrbaren Transformationen:

(a.) $$x_i = \gamma \bar{x}_i,$$

(b.) $$x_i = \bar{x}_k, \quad x_k = \bar{x}_i,$$

(c.) $$x_i = \bar{x}_i + t\bar{x}_k \quad \text{oder auch} \quad x_i = \bar{x}_i + t,$$

wo x_i, x_k irgend zwei der Variablen sind, und wo alle übrigen Variablen x_λ immer den entsprechenden $\bar{x}_\lambda$ gleichzusetzen sind, so geht jedesmal F in eine äquivalente Form $\bar{F}$ über. Beachtet man aber, welche Veränderung das Coefficientensystem bei jeder dieser drei Elementartransformationen erfährt, so ergiebt sich zunächst das folgende Resultat:

> Das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix}$ geht in ein äquivalentes über, wenn man irgend eine seiner n letzten Zeilen mit einer nicht verschwindenden Constanten γ multiplicirt, wenn man ferner irgend zwei der n letzten Zeilen mit einander vertauscht, und wenn man endlich zu

den Elementen irgend einer Zeile ein und dasselbe Vielfache der entsprechenden Elemente irgend einer der *n letzten* Zeilen hinzufügt, jedoch ist jedesmal die entsprechende Veränderung bei den Colonnen des Systemes ebenfalls vorzunehmen.

Jede dieser drei Veränderungen des Systemes $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ entspricht nämlich einer der in (1.) angegebenen Elementartransformationen der Variablen von F. — Man kann nun leicht zeigen, dass man nicht bloss die n letzten sondern auch die erste Zeile und die erste Colonne des Systems mit einer Constanten γ multipliciren darf. Betrachtet man nämlich die zu $F(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalente Form:

$$\gamma^2 . F(x_1, \ldots, x_n) = a.\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma^2 x_k + \Sigma\Sigma c_{ik}\gamma^2 x_i x_k$$

und setzt in ihr:

$$x_1 = \gamma \bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_n = \gamma \bar{x}_n,$$

so geht sie über in die äquivalente Form:

$$\bar{F} = a.\gamma^2 + 2\Sigma b_{0k}\gamma . \bar{x}_k + \Sigma c_{ik}\bar{x}_i \bar{x}_k,$$

deren Coefficientensystem $\binom{a\gamma^2,\ b\gamma}{b\gamma,\ c}$ aus dem ursprünglichen durch Multiplication seiner ersten Zeile und Colonne mit γ erhalten wird. Endlich kann man noch das ganze System mit -1 multipliciren, da alsdann nur die Form F durch die äquivalente $(-F)$ ersetzt wird. Fasst man diese letzten Resultate mit den vorher gefundenen zusammen, so ergiebt sich der Satz:

(A.) Das System $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ geht in ein äquivalentes über, wenn man eine seiner Zeilen mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicirt, oder zwei Zeilen vertauscht, oder ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addirt, und jedesmal dieselbe Operation bei den entsprechenden Colonnen ausführt; jedoch darf man die erste Zeile (und Colonne) weder mit einer späteren vertauschen, noch sie zu einer späteren addiren. Endlich kann man die Vorzeichen aller Elemente zugleich in die entgegengesetzten umwandeln.

Betrachtet man nun zunächst das symmetrische System (c_{ik}) für sich, so kann man dieses, wie bekannt und leicht zu erweisen ist, durch die elementaren und symmetrischen Veränderungen seiner Zeilen, welche in (A.) angegeben wurden, stets auf ein sogenanntes Diagonalsystem reduciren,

d. h. auf ein solches, welches zu beiden Seiten seiner Diagonale lauter Nullen enthält.

Die Diagonalelemente sind sämmtlich ± 1 oder Null, und zwar können die Elemente $+1$ durch symmetrische Reihenvertauschungen an die ersten, die Elemente -1 an die folgenden Stellen gebracht werden, so dass auf sie erst die Elemente Null in der Diagonale folgen. Es mögen ϱ Elemente $+1$, ϱ' Elemente -1 in jenem Diagonalsystem auftreten, so dass dasselbe ausserdem noch $n-(\varrho+\varrho')$ Elemente Null enthält; dann kann das reducirte System (c_{ik}) in leicht verständlicher Weise folgendermaassen bezeichnet werden:

$$\begin{pmatrix} (+1)_\varrho & 0 & 0 \\ 0 & (-1)_{\varrho'} & 0 \\ 0 & 0 & (0) \end{pmatrix}.$$

Genau dieselben Reihenverbindungen kann man nun bei dem *ganzen* Systeme $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ vornehmen, weil hier niemals die erste Zeile oder Colonne mit einer der folgenden verbunden wird. Dann geht dieses System in ein äquivalentes über, das folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$\begin{vmatrix} a, & b^{(1)}, & b^{(2)}, & b^{(3)} \\ b^{(1)}, & (+1)_\varrho, & 0, & 0 \\ b^{(2)}, & 0, & (-1)_{\varrho'}, & 0 \\ b^{(3)}, & 0, & 0, & (0) \end{vmatrix},$$

und in welchem jetzt auch die Elemente b andere geworden sind. Hier können die $\varrho+\varrho'$ Elemente $b^{(1)}$ und $b^{(2)}$, welche mit einem der Diagonalelemente ± 1 in einer Reihe stehen, dadurch zu Null gemacht werden, dass man ein geeignetes Vielfaches der zu jener Einheit gehörigen Reihe von der ersten abzieht, was ja gestattet ist. In dem so sich ergebenden äquivalenten Systeme

$$\begin{vmatrix} a, & 0, & 0, & b^{(3)} \\ 0, & (+1)_\varrho, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & (-1)_{\varrho'}, & 0 \\ b^{(3)}, & 0, & 0, & (0) \end{vmatrix}$$

kann endlich, falls von den noch übrigen $n-(\varrho+\varrho')$ Elementen $b^{(3)}$ auch nur eines von Null verschieden ist, dieses durch Reihenvertauschung an die erste Stelle der Elemente $b^{(3)}$ gebracht, und dann durch Division der zuge-

hörigen Zeile und Colonne mit $b_1^{(3)}$ zu 1 gemacht werden. Hierauf können alle auf dieses erste Element folgenden Elemente $b^{(3)}$, sowie auch das an erster Stelle stehende Element a dadurch zu Null gemacht werden, dass man geeignete Vielfache der zu $b_1^{(3)}$ gehörigen Zeile von allen folgenden, sowie von der ersten abzieht, und ebenso mit den Colonnen verfährt.

Durch diese Elementartransformationen geht das ursprüngliche System in ein äquivalentes reducirtes über, in welchem

$$c_{11} = \cdots = c_{\varrho\varrho} = +1, \quad c_{\varrho+1,\varrho+1} = \cdots = c_{\varrho+\varrho',\varrho+\varrho'} = 0,$$

$$b_1^{(3)} = b_{\varrho+\varrho'+1,0} = b_{0,\varrho+\varrho'+1} = 1$$

und alle übrigen Elemente gleich Null sind; die ursprüngliche Form ist also in diesem Falle der reducirten:

$$(3.) \qquad \xi_1^2 + \cdots + \xi_\varrho^2 - \xi_{\varrho+1}^2 - \cdots - \xi_{\varrho+\varrho'}^2 + 2\xi_{\varrho+\varrho'+1}$$

äquivalent.

Sind dagegen in dem Systeme (2.) alle Elemente $b^{(3)}$ gleich Null, so kann man, falls $a \gtrless 0$ ist, dieses erste Element dadurch zu ± 1 machen, dass man die erste Zeile und die erste Colonne durch $\sqrt{|a|}$ dividirt, wo $|a|$ den absoluten Werth von a bezeichnet. In diesem Falle ist also die ursprüngliche Form einer der drei reducirten

$$(3^a.) \qquad \pm 1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_\varrho^2 - \xi_{\varrho+1}^2 - \cdots - \xi_{\varrho+\varrho'}^2,$$

$$(3^b.) \qquad \xi_1^2 + \cdots + \xi_\varrho^2 - \xi_{\varrho+1}^2 - \cdots - \xi_{\varrho+\varrho'}^2$$

äquivalent.

Bei den reducirten Formen (3.) und (3^b.) kann man endlich voraussetzen, dass die Anzahl ϱ der positiven Quadrate grösser oder wenigstens gleich ist der Anzahl ϱ' der negativen, denn falls dies nicht der Fall sein sollte, so kann diese Form durch Multiplication mit -1 und geeignete Elementartransformationen in eine äquivalente übergeführt werden, bei der diese Voraussetzung erfüllt ist.

Bei den Formen (3^a.) dagegen kann man, eventuell durch Multiplication mit -1 und Vertauschung der Variablen, stets erreichen, dass das constante Glied gleich $+1$ ist, dann kann aber $\varrho \gtrless \varrho'$ sein.

Fasst man die so gewonnenen Typen reducirter Formen in etwas anderer Weise zusammen, so lässt sich das bis jetzt gefundene Ergebniss folgendermaassen aussprechen:

Jede nicht homogene quadratische Form ist einer der folgenden reducirten Formen äquivalent:

$$\text{(I.)} \qquad \xi_1^2+\cdots+\xi_\varrho^2-\xi_{\varrho+1}^2-\cdots-\xi_{\varrho+\varrho'}^2, \qquad (\varrho+\varrho' \leqq n,\ \varrho' \leqq \varrho)$$

$$\text{(II.)} \qquad 1+\xi_1^2+\cdots+\xi_\varrho^2-\xi_{\varrho+1}^2-\cdots-\xi_{\varrho+\varrho'}^2, \qquad (\varrho+\varrho' \leqq n)$$

$$\text{(III.)} \qquad \xi_1^2+\cdots+\xi_\varrho^2-\xi_{\varrho+1}^2-\cdots-\xi_{\varrho+\varrho'}^2+2\xi_{\varrho+\varrho'+1}. \qquad (\varrho+\varrho' \leqq n-1,\ \varrho' \leqq \varrho)$$

Man kann nun leicht nachweisen, dass von den so gefundenen Formen (I.), (II.), (III.) keine einer anderen äquivalent ist. Durch die gestatteten Transformationen wird nämlich der Rang des ganzen Coefficientensystems $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$ bekanntlich nicht geändert. Ebenso wenig ändert sich aber auch der Rang des Systemes (c_{ik}) für sich, da bei einer jeden Transformation die Zeilen und Colonnen dieses Systems stets nur unter sich und nie mit der ersten Zeile oder Colonne des ganzen Systems verbunden werden. Bezeichnet man also den Rang des ganzen Systemes $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$ und den des inneren Systemes (c) beziehlich durch $[a, b, c]$ und $[c]$, so sind diese Zahlen, also auch die aus ihnen gebildeten

$$\text{(4.)} \qquad \begin{cases} J_0 = [a,\ b,\ c]-[c], \\ J_1 = [c] \end{cases}$$

für jede beliebige Transformation der Formen F Invarianten; zwei reducirte Formen können also nicht äquivalent sein, wenn (J_0, J_1) für beide verschieden sind. Sucht man nun für die Coefficientensysteme der reducirten Formen (I.), (II.), (III.) den Rang der Systeme (c) und $\begin{pmatrix} a, b \\ b, c \end{pmatrix}$, so ist ersterer in allen drei Fällen gleich $(\varrho+\varrho')$, dagegen ist der Rang des ganzen Systems in den drei unterschiedenen Formen beziehlich gleich $(\varrho+\varrho')$, $(\varrho+\varrho'+1)$, $(\varrho+\varrho'+2)$. Die beiden Invarianten (4.) sind also für diese drei Formen

$$\text{(4}^{\text{a}}\text{.)} \qquad \begin{cases} J_0 = 0,\ 1,\ 2, \\ J_1 = \varrho+\varrho'. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass zwei reducirte Formen der drei Abtheilungen (I.), (II.), (III.) nur dann äquivalent sein könnten, wenn beide derselben Abtheilung angehören, und wenn ferner die Anzahl $\varrho+\varrho'$ der positiven und der negativen Quadrate *zusammengenommen* bei beiden dieselbe ist.

Aber auch zwei solche Formen können nur dann äquivalent sein, wenn die beiden Anzahlen ϱ und ϱ' *für sich* bei beiden übereinstimmen,

d. h. wenn beide Formen identisch sind. Um dies nachzuweisen bemerke ich, das alle hier angewendeten Coordinatentransformationen nur symmetrische Transformationen des symmetrischen Systems $\binom{a,\ b}{b,\ c}$, d. h. solche sind, welche die Zeilen und Colonnen desselben in gleicher Weise umformen. Durch diese werden aber der positive und der negative Trägheitsindex dieses Systems nicht geändert; oder, was dasselbe ist, die Anzahl der positiven und die der negativen Quadrate, in welche die homogen gemachte quadratische Form F, d. h.

$$(5.) \qquad a x_0^2 + 2\Sigma b_{0k} x_0 x_k + \Sigma c_{ki} x_i x_k$$

transformirt werden kann, sind für alle hier auftretenden Coordinatentransformationen Invarianten. Dasselbe gilt aber auch für die beiden Trägheitsindices des inneren Systems (c_{ik}) allein, oder was dasselbe ist, für die Anzahlen der positiven und negativen Quadrate, in welche die quadratische Form:

$$(5^a.) \qquad \Sigma c_{ik} x_i x_k$$

transformirt wird, weil diese, wie oben erwähnt, durch alle hier auftretenden linearen Substitutionen für sich transformirt wird. Multiplicirt man endlich die ganze Form mit einer positiven Constanten, so bleiben jene beiden Paare von Trägheitsindices ungeändert, dagegen vertauschen sich jene Indices und zwar in beiden Formen, sobald dieselben mit einer negativen Constanten multiplicirt werden.

Nach einer von Herrn *Frobenius* vorgeschlagenen Bezeichnung soll die Anzahldifferenz der positiven und der negativen Quadrate, in welche eine quadratische Form transformirt werden kann, oder, was dasselbe ist, die Vorzeichensumme jener Quadrate die *Signatur* der Form, oder übertragen auch die Signatur ihres Coefficientensystemes genannt werden. Dann bleibt die Signatur der *beiden* Formen (5.) und (5ª.) bei jeder Coordinatentransformation, sowie auch bei Multiplication der Formen mit einer positiven Constanten ungeändert, weil dasselbe für die Trägheitsindices gilt, dagegen ändert die Signatur *beider* Formen ihr Vorzeichen, wenn sie mit einer negativen Constanten multiplicirt werden. Bezeichnet man also die absoluten Werthe der Signaturen der beiden Systeme $\binom{a,\ b}{b,\ c}$ und (c) beziehlich durch

$$|a,\ b,\ c| \quad \text{und} \quad |c|,$$

so sind diese und somit auch die aus ihnen gebildeten Zahlen:

$$\mathfrak{J}_0 = |a,\ b,\ c| - |c|, \qquad \mathfrak{J}_1 = |c| \tag{6.}$$

für jede Transformation der Formen ebenfalls Invarianten; zwei reducirte Formen können also nicht äquivalent sein, wenn nicht auch diese Zahlen für beide denselben Werth haben.

Nun ist für alle Formen (I.), (II.), (III.)

$$\mathfrak{J}_1 = |c| = |\varrho - \varrho'|,$$

wo $|\varrho-\varrho'|$ wie gewöhnlich den absoluten Werth der Zahl $\varrho-\varrho'$ bedeutet; da nun in (I.) und (III.) $\varrho' \leqq \varrho$ vorausgesetzt werden konnte, so ist für diese

$$\mathfrak{J}_1 = \varrho - \varrho'.$$

Für zwei reducirte Formen dieser beiden Abtheilungen stimmen also die Invarianten $[c] = \varrho+\varrho'$ und $|c| = \varrho-\varrho'$ nur dann überein, wenn ϱ und ϱ' selbst für beide gleiche Werthe haben, d. h. wenn jene beiden Formen identisch sind.

Für die in der Abtheilung (II.) befindlichen Formen ist nun die Signatur $|a,\ b,\ c| = |\varrho+1-\varrho'|$, es ist also hier:

$$\mathfrak{J}_0 = |a,\ b,\ c| - |c| = |\varrho-\varrho'+1| - |\varrho-\varrho'| = \pm 1,$$

je nachdem $\varrho \geqq \varrho'$ oder $\varrho < \varrho'$ ist. Für diese Formen ist also:

$$\mathfrak{J}_0 \cdot \mathfrak{J}_1 = \varrho - \varrho'.$$

Da nun für die Formen (II.), für die $\varrho+\varrho'$ denselben Werth hat, die Differenz $\mathfrak{J}_0\mathfrak{J}_1 = \varrho-\varrho'$ lauter verschiedene Werthe besitzt, so sind auch diese nicht unter einander äquivalent.

Jede nicht homogene quadratische Form ist also einer und nur einer der reducirten Formen (I.), (II.), (III.) äquivalent; es ergiebt sich somit der Satz:

Zwei Oberflächen

$$F = a + 2\Sigma b_{0k}x_k + \Sigma c_{ik}x_ix_k,$$
$$F' = a' + 2\Sigma b'_{0k}x_k + \Sigma c'_{ik}x_ix_k$$

gehören dann und nur dann in dieselbe Klasse, sind also linear in einander transformirbar, wenn die vier Invarianten:

$$J_0 = [a,\ b,\ c] - [c], \qquad \mathfrak{J}_0 = |a,\ b,\ c| - |c|,$$
$$J_1 = [c], \qquad \mathfrak{J}_1 = |c| \tag{7.}$$

für beide dieselben Werthe haben.

Hierbei mag bemerkt werden, dass für $J_0 = 0$ oder 2 die Invariante $\mathfrak{J}_0$ fortgelassen werden kann, für $J_0 = 1$ aber die beiden Invarianten $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{J}_1$ durch die eine $\mathfrak{J}_0\mathfrak{J}_1$ ersetzt werden können, so dass man in jedem Falle nur drei Invarianten zu untersuchen hat.

Nunmehr kann die Anzahl der reducirten Formen in den Abtheilungen (I.), (II.), (III.) durch einfache Abzählung gefunden werden. Für die erste unter ihnen ist diese Anzahl A_1 gleich derjenigen aller Zahlenpaare (ϱ, ϱ'), deren Summe gleich oder kleiner als n und von denen die erste nicht kleiner ist als die zweite. Eine einfache Discussion der beiden möglichen Fälle ($n = 2\nu$ oder $2\nu+1$) ergiebt diese Anzahl gleich:

$$\frac{(n+2)^2}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{(n+2)^2-1}{4} = \frac{(n+1)(n+3)}{4},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Beide Fälle sind also in dem Ausdruck

$$A_1 = E\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) \tag{8.}$$

zugleich enthalten, wenn, wie gewöhnlich, $E(\alpha)$ die in dem Bruche α enthaltene grösste ganze Zahl bedeutet. Hieraus ergiebt sich für die Anzahl A_3 der in (III.) enthaltenen reducirten Formen der Ausdruck:

$$A_3 = E\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right), \tag{8a.}$$

dadurch dass man oben n durch $n-1$ ersetzt. Da nun von den beiden Zahlen $n+1$ und $n+2$ eine gerade und eine ungerade ist, so ist die Anzahl der reducirten Formen (I.) und (III.) zusammengenommen gleich

$$A_1 + A_3 = \frac{(n+2)^2+(n+1)^2-1}{4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die Zahl A_2 der reducirten Formen (II.) endlich ist der Anzahl aller nicht negativen Zahlenpaare (ϱ, ϱ') gleich, deren Summe nicht grösser als n ist; da nun hier zu jedem $\varrho = n-i$ die $i+1$ Zahlen $\varrho' = 0, 1, \ldots, i$ gehören, so ist

$$A_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{8b.}$$

Die Anzahl $A_1+A_2+A_3$ aller reducirten Formen, oder die Klassenzahl

der Oberflächen zweiter Ordnung im n-dimensionalen Raum ist also gleich:

$$(n+1)(n+2),$$

d. h. man erhält den wichtigen Satz:

> Die Anzahl aller Klassen von Oberflächen zweiter Ordnung im n-dimensionalen Raume, welche durch eine reale endliche Coordinatentransformation nicht in einander übergeführt werden können, ist stets gleich $(n+1)(n+2)$.

So ist die Klassenanzahl der durch eine Gleichung

$$a+2bx+cx^2 = 0$$

auf einer Linie definirten Punktsysteme gleich 6, die Anzahl der durch eine Gleichung

$$a+2b_1x+2b_2y+c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2 = 0 \quad .$$

definirten Kegelschnittklassen gleich 12, die Anzahl der Klassen von Oberflächen zweiter Ordnung im Raume gleich 20 etc. Doch mag gleich an dieser Stelle bemerkt werden, dass hier die uneigentlichen Oberflächen zweiter Ordnung, d. h. diejenigen, welche gar keine Glieder zweiter Ordnung besitzen, also Oberflächen erster Ordnung sind, jedesmal mitgezählt sind. Beachtet man, dass bei allen linearen Transformationen das innere System (c_{ik}) für sich umgeformt wird, dass dasselbe also lauter verschwindende Glieder behält, wenn es einmal solche hat, so erkennt man, dass die Anzahl der reducirten *uneigentlichen* quadratischen Formen gleich drei ist, und zwar sind das die folgenden:

$$1)\ 0=0, \qquad 2)\ 1=0, \qquad 3)\ 2\xi_1=0,$$

und diese stellen geometrisch betrachtet beziehlich den ganzen n-dimensionalen Raum, alle unendlich fernen Punkte des Raumes und eine ebene $(n-1)$-fache Mannigfaltigkeit in demselben dar. Die Anzahl der Klassen eigentlicher Oberflächen zweiter Ordnung ist also in jedem Falle

$$n(n+3)-1,$$

also z. B. gleich 3, 9, 17 für $n=1,\ 2,\ 3$.

Für die vorher angegebene Zusammenfassung der reducirten Oberflächen zweiter Ordnung in die drei Abtheilungen (I.), (II.), (III.) war zunächst nur der verschiedene Charakter der Coefficientensysteme von F massgebend gewesen. Es soll jetzt aber nachgewiesen werden, dass die jenen

reducirten Formen in (I.), (II.), (III.) entsprechenden Oberflächenklassen auch geometrisch in einer sehr nahen Beziehung zu einander stehen, und es soll der Charakter derselben angegeben werden.

Ist $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ die Gleichung einer beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, so soll im Anschluss an eine gebräuchliche Bezeichnung der analytischen Geometrie ein Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ des n-dimensionalen Raumes ein ***Mittelpunkt*** der Oberfläche genannt werden, wenn diese in Bezug auf ihn symmetrisch liegt, d. h. wenn ein Punkt $(\eta_1+y_1, \ldots, \eta_n+y_n)$ dann und nur dann auf F liegt, wenn auch der symmetrisch liegende $(\eta_1-y_1, \ldots, \eta_n-y_n)$ derselben angehört. Da dann aber die beiden Flächen:

$$F(\eta_i+y_i) = 0 \quad \text{und} \quad F(\eta_i-y_i) = 0$$

genau dieselben Punkte enthalten, so können sich ihre linken Seiten nur durch einen constanten Factor unterscheiden, d. h. es muss für variable $y_1, \ldots, y_n$ die Identität bestehen:

$$(9.) \qquad F(\eta_1+y_1, \ldots, \eta_n+y_n) = \lambda F(\eta_1-y_1, \ldots, \eta_n-y_n),$$

wo λ eine nicht verschwindende Constante ist.

Entwickelt man die Functionen zweiten Grades auf beiden Seiten der Gleichung (9.) nach Potenzen von $y_1, \ldots, y_n$, so ergiebt sich die folgende Bedingung dafür, dass der Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ein Mittelpunkt jener Oberfläche ist:

$$\left(F_0+\sum_i F_i y_i+\tfrac{1}{2}\sum_{i,k} F_{ik} y_i y_k\right) = \lambda\left(F_0-\sum_i F_i y_i+\tfrac{1}{2}\sum_{i,k} F_{ik} y_{ik}\right),$$

wo zur Abkürzung:

$$F_0 = F(\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad F_i = \frac{\partial F(\eta_1, \ldots, \eta_n)}{\partial \eta_i}, \quad F_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i . \partial \eta_k}$$

gesetzt ist. Ist nun zunächst F eine eigentliche Oberfläche zweiter Ordnung, so sind nicht alle Coefficienten F_{ik} gleich Null, und die obige Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$(10.) \qquad \lambda = +1, \quad F_i(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Ist dagegen $F = 0$ nur eine Oberfläche erster Ordnung, d. h. eine Ebene im n-dimensionalen Raume, sind also alle Coefficienten $F_{ik} = 0$, aber nicht alle Glieder erster Dimension $F_i = 0$, so ergiebt sich aus jener Gleichung:

$$\lambda = -1, \quad F_0 = F(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$

d. h. alle Punkte $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ der Ebene $F = 0$ selbst und nur sie sind in

diesem Sinne Mittelpunkte derselben. Sind endlich im Grenzfalle auch alle Glieder erster Dimension Null, ist also die Gleichung von der Form $a = 0$, so ist $\lambda = +1$, und aus (9.) folgt, dass dann jeder Punkt des Raumes als Mittelpunkt anzusehen ist, wie dies auch geometrisch evident ist. Beschränken wir uns also der Einfachheit wegen auf eigentliche Oberflächen zweiter Ordnung, so ergiebt sich:

Ein Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ist dann und nur dann ein Mittelpunkt einer eigentlichen Oberfläche zweiter Ordnung $F = 0$, wenn seine Coordinaten den n linearen Gleichungen:

$$(11.) \qquad \tfrac{1}{2}F_i = b_{i0} + c_{i1}\eta_1 + \cdots + c_{in}\eta_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen.

Der Punkt $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ist also dann und nur dann ein Mittelpunkt von $F = 0$, wenn in der nicht homogenen Function zweiten Grades

$$(12.) \qquad \mathfrak{F}(y_1, \ldots, y_n) = F(\eta_i + y_i) = F(\eta_i) + \Sigma F_k(\eta_i) y_k + \tfrac{1}{2}\Sigma F_{ik} y_i y_k$$

alle Glieder erster Dimension in $y_1, \ldots, y_n$ gleich Null sind, und dieser Mittelpunkt $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ liegt auf der Fläche oder ausserhalb derselben, je nachdem in der Function $\mathfrak{F}(y_1, \ldots, y_n)$ das constante Glied entweder ebenfalls gleich Null oder von Null verschieden ist.

Unterwirft man nun die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einer beliebigen Coordinatentransformation

$$(12.) \qquad x_i = \alpha_{i0} + \Sigma \alpha_{ik} \bar{x}_k$$

und sind $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ die Coordinaten des dem Punkte $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ entsprechenden Punktes, ist also allgemein:

$$(12^a.) \qquad \eta_i = \alpha_{i0} + \Sigma \alpha_{ik} \bar{\eta}_k,$$

so ist $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ für die transformirte Oberfläche $\bar{F}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$ ebenfalls ein Mittelpunkt, denn für diese hängen die neuen Variablen $\bar{y}_k = \bar{x}_k - \bar{\eta}_k$ mit den ursprünglichen $y_i = x_i - \eta_i$ durch die aus (12.) und (12ª.) sich ergebende umkehrbare ***homogene*** lineare Transformation:

$$y_i = \Sigma \alpha_{ik} \bar{y}_k$$

zusammen; der transformirten Form

$$\bar{\mathfrak{F}}(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = \bar{F}(\bar{\eta}_i + \bar{y}_i)$$

fehlen also die Glieder erster Dimension dann und nur dann, wenn dies

bei der ursprünglichen Form der Fall war, und das Entsprechende gilt alsdann von dem Verschwinden bzw. Nichtverschwinden der constanten Glieder. Da endlich die Mittelpunkte von $F=0$ und $\alpha.F=0$ offenbar stets dieselben sind, so ergiebt sich der Satz:

> Gehören zwei Oberflächen einer und derselben Klasse an, gehen also ihre sämmtlichen Punkte durch eine lineare Coordinatentransformation in einander über, so gehen ihre Mittelpunkte durch dieselbe Transformation in einander über.

Man braucht also nur die Mittelpunkte für die Oberflächen

$$\text{(I'.)} \qquad x_1^2+\cdots+x_\varrho^2-x_{\varrho+1}^2-\cdots-x_{\varrho+\varrho'}^2 = 0,$$

$$\text{(II'.)} \qquad 1+x_1^2+\cdots+x_\varrho^2-x_{\varrho+1}^2-\cdots-x_{\varrho+\varrho'}^2 = 0,$$

$$\text{(III'.)} \qquad x_1^2+\cdots+x_\varrho^2-x_{\varrho+1}^2-\cdots-x_{\varrho+\varrho'}^2+2x_{\varrho+\varrho'+1} = 0$$

zu untersuchen, welche den reducirten Formen (I.), (II.), (III.) entsprechen, d. h. man hat ihre partiellen Ableitungen nach $x_1, \ldots, x_n$ einzeln gleich Null zu setzen, und aus diesen n linearen Gleichungen die Coordinaten der Mittelpunkte zu bestimmen. Für die Oberflächen (I'.) und (II'.) ergeben sich so die Gleichungen:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{\varrho+\varrho'} = 0,$$

während die übrigen Coordinaten $x_{\varrho+\varrho'+1}, \ldots, x_n$ völlig beliebig bleiben. In beiden Fällen erfüllen also die Mittelpunkte eine ebene Mannigfaltigkeit, deren Ordnung gleich $n-(\varrho+\varrho')$, d. h. gleich $n-[c]$ ist; und die so gefundenen Punkte liegen jedesmal *alle* auf der Oberfläche selbst oder ausserhalb derselben, je nachdem diese der Abtheilung (I'.) oder (II'.) angehört. Die Oberflächen der dritten Abtheilung besitzen dagegen gar keine im Endlichen liegenden Mittelpunkte, da hier zu den vorigen linearen Gleichungen noch die eine:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\varrho+\varrho'+1}} = 2 = 0$$

hinzukommt, welche durch endliche Werthe der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ nicht zu befriedigen ist. Man erhält also den Satz:

> Die Mittelpunkte einer Oberfläche zweiter Ordnung liegen sämmtlich auf ihr, oder sämmtlich ausserhalb derselben, oder aber alle im Unendlichen, je nachdem ihre erste Invariante

$$J_0 = [a, b, c]-[c]$$

den Werth 0, 1 oder 2 besitzt; in den beiden ersten der unterschiedenen Fälle erfüllen die im Endlichen liegenden Mittelpunkte eine ebene Mannigfaltigkeit, deren Ordnung gleich

$$n - J_1 = n - [c]$$

ist.

Die Flächen zweiter Ordnung, welche im Endlichen Mittelpunkte besitzen, sollen *Mittelpunktsflächen* genannt werden, und zwar Mittelpunktsflächen der *ersten* oder der *zweiten Art,* je nachdem die Mittelpunkte auf ihr oder ausserhalb derselben liegen. Dagegen mögen die Flächen ohne einen Mittelpunkt im Endlichen, *parabolische Flächen* heissen. Beachtet man dann, dass diese Eintheilung mit der in (I.), (II.), (III.) gegebenen zusammenfällt, dass aber von jeder dieser reducirten Formen je eine fortzulassen ist, weil sie keiner eigentlichen Oberfläche entspricht, so ergiebt sich endlich leicht der Satz:

Die Anzahl der Klassen von Mittelpunktsflächen erster Art ist $E\left(\frac{n(n+4)}{4}\right)$, die der Mittelpunktsflächen zweiter Art $\frac{n(n+3)}{2}$ und die Anzahl der Klassen parabolischer Flächen ist $E\left(\frac{(n-1)(n+3)}{4}\right)$.

Zum Abschluss dieser Bemerkungen soll als ein einfaches Beispiel die Eintheilung der 17 Oberflächen zweiter Ordnung im Raume nach den Werthen ihrer 4 Invarianten angegeben werden:

I) $J_0 = \begin{bmatrix} a, b \\ b, c \end{bmatrix} - [c] = 0$. Mittelpunktsflächen der ersten Art.

(Alle Mittelpunkte der Oberfläche liegen auf derselben.)

Anzahl $E\left(\frac{3.7}{4}\right) = 5$.

$J_1 = [c_{ik}]$:	$\mathfrak{J}_1 = \lvert c_{ik} \rvert$:	*Reducirte Formen:*	*Bedeutung:*	*Mittelpunkte:*
1	1	$x^2 = 0$	Doppelebene.	**YZ**-Ebene.
2	2	$x^2+y^2 = 0$	2 sich schneidende imaginäre Ebenen.	**Z**-Axe.
2	0	$x^2-y^2 = 0$	2 sich schneidende reale Ebenen.	**Z**-Axe.
3	3	$x^2+y^2+z^2 = 0$	Imaginärer Kegel.	Anfangspunkt.
3	1	$x^2+y^2-z^2 = 0$	Realer Kegel.	Anfangspunkt.

II) $J_0 = \begin{bmatrix} a, b \\ b, c \end{bmatrix} - [c] = 1$. Mittelpunktsflächen der zweiten Art.

(Alle Mittelpunkte liegen ausserhalb der Fläche.)

Anzahl $\frac{3.6}{2} = 9$.

$J_1 = [c_{ik}]$:	$\mathfrak{J}_0 = \begin{Bmatrix} a, b \\ b, c \end{Bmatrix} - \lvert c \rvert = \pm 1$:	$\mathfrak{J}_1 = \lvert c \rvert$:	*Reducirte Form:*	*Bedeutung:*	*Mittelpunkte:*
1	+1	1	$1+x^2=0$	2 parallele imaginäre Ebenen.	*YZ*-Ebene.
1	−1	1	$1-x^2=0$	2 parallele reale Ebenen.	*YZ*-Ebene.
2	+1	2	$1+x^2+y^2=0$	imaginärer elliptischer Cylinder.	*Z*-Axe.
2	+1	0	$1+x^2-y^2=0$	hyperbolischer Cylinder.	*Z*-Axe.
2	−1	2	$1-x^2-y^2=0$	realer elliptischer Cylinder.	*Z*-Axe.
3	+1	3	$1+x^2+y^2+z^2=0$	imaginäres Ellipsoid.	Anfangspkt.
3	+1	1	$1+x^2+y^2-z^2=0$	zweischaliges Hyperboloid.	Anfangspkt.
3	−1	1	$1+x^2-y^2-z^2=0$	einschaliges Hyperboloid.	Anfangspkt.
3	−1	3	$1-x^2-y^2-z^2=0$	reales Ellipsoid.	Anfangspkt.

III) $J_0 = \begin{bmatrix} a, b \\ b, c \end{bmatrix} - [c] = 2$. Parabolische Flächen.

(Alle Mittelpunkte liegen im Unendlichen.)

Anzahl $E\left(\frac{2.6}{4}\right) = 3$.

$J_1 = [c_{ik}]$:	$\mathfrak{J}_1 = \lvert c_{ik} \rvert$:	*Reducirte Form:*	*Bedeutung:*
1	1	$x^2+2y=0$	Parabolischer Cylinder.
2	2	$x^2+y^2+2z=0$	Elliptisches Paraboloid.
2	0	$x^2-y^2+2z=0$	Hyperbolisches Paraboloid.

Berlin, d. 18. Januar 1894.

Ueber permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt.

(Hierzu Tafel 2.)

(Von Herrn *O. Staude* in Rostock.)

Das allgemeine Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt ist unter drei verschiedenen speciellen Voraussetzungen, die sich auf das Grössenverhältniss der Hauptträgheitsmomente des Körpers für den Drehungspunkt und auf die Lage des Schwerpunktes beziehen, vollständig erledigt worden*).

Die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung ist es, nachzuweisen, dass für die Differentialgleichungen des genannten Problems, auch wenn keinerlei Voraussetzungen über die Hauptträgheitsmomente und die Lage des Schwerpunktes gemacht werden, doch noch einfach-unendlich viele Lösungen angegeben werden können. Dieselben bedeuten gleichförmige Rotationen des Körpers um unveränderliche Axen, die in besonderer Weise in ihm gelegen sind. Es findet sich nämlich in dem Körper ein dem gewählten Drehungspunkte eigenthümlicher Kegel zweiter Ordnung, welcher mit dem Trägheitsellipsoid dieses Punktes concentrisch, aber nicht coaxial ist und wesentlich von der Lage des Schwerpunktes gegen die Hauptträgheitsaxen abhängt. Jede Erzeugende dieses Kegels bleibt, wenn sie vertical und mit einem bestimmten ihrer beiden Enden nach oben gestellt ist, während zugleich der Körper mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um sie in Rotation versetzt wird, permanente Rotationsaxe des schweren Körpers.

Dieses allgemeine Resultat, welches in den §§ 1—5 dieser Abhandlung entwickelt wird, kann nach zwei Richtungen specialisirt werden, indem einerseits über die Lage des Schwerpunktes gegen das Trägheitsellipsoid

*) Vgl. über die drei Fälle ***Sophie Kowalevski,*** sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta mathematica, Bd. XII, S. 183 unten.

und andererseits über die Gestalt des letzteren besondere Annahmen eingeführt werden. Die hierbei sich ergebenden Veränderungen des Resultates, welche zuletzt in bekannte Sätze auslaufen, wird in den §§ 6—7 dargelegt.

Da in diesen Untersuchungen die kleinste, mittlere und grösste Axe des Trägheitsellipsoides sich nicht ganz gleich verhalten, ergab es sich als nothwendig, auch coordinirte Fälle vollständig aufzuführen, und zeigte sich zugleich, dass die zusammenfassende Formulirung der Resultate durch schematische Figuren nicht unbedeutend vereinfacht werden konnte. Die aus diesem Grunde beigefügten Figuren 4—14 sind daher in Verbindung mit den betreffenden Stellen des Textes geradezu als eine tabellarische Uebersicht der Resultate der Abhandlung zu betrachten.

§ 1.

Allgemeine Form der Bedingungsgleichungen der permanenten Verticalaxe.

Es sei $Oxyz$ (Fig. 1) ein im Raume festes rechtwinkliges Coordinatensystem mit senkrecht nach oben gerichteter z-Axe. Um den Anfangspunkt O desselben drehe sich ein schwerer Körper von der Masse M, dessen Hauptträgheitsaxen für den Punkt O ein zweites Coordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ bilden. Die entsprechenden Hauptträgheitsmomente des Körpers seien A, B, C. Die Coordinaten des Schwerpunktes S seien mit ξ_0, η_0, ζ_0, die Richtungscosinus der z-Axe mit c_1, c_2, c_3 und die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers mit λ, μ, ν bezeichnet, alle drei Angaben bezogen auf das Axensystem $O\xi\eta\zeta$. Endlich sei g die Beschleunigung der Schwere.

Bei diesen Festsetzungen gelten für die Drehung des Körpers die folgenden sechs Differentialgleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} A\lambda' - (B-C)\mu\nu &= -Mg(\eta_0 c_3 - \zeta_0 c_2), \\ B\mu' - (C-A)\nu\lambda &= -Mg(\zeta_0 c_1 - \xi_0 c_3), \\ C\nu' - (A-B)\lambda\mu &= -Mg(\xi_0 c_2 - \eta_0 c_1), \end{cases}$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} c_1' &= c_2\nu - c_3\mu, \\ c_2' &= c_3\lambda - c_1\nu, \\ c_3' &= c_1\mu - c_2\lambda, \end{cases}$$

in denen die Accente die Differentiation nach der Zeit t bedeuten. Zu diesen Gleichungen treten ferner die Relation:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

zwischen den drei Richtungscosinus c_1, c_2, c_3 und die beiden Integrale:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2) = -Mg(c_1\xi_0+c_2\eta_0+c_3\zeta_0)+h, \\ A\lambda c_1+B\mu c_2+C\nu c_3 = k \end{cases}$$

mit den Integrationsconstanten h und k. Für die absolute Grösse der Winkelgeschwindigkeit (λ, μ, ν) des Körpers um die instantane Drehungsaxe führen wir noch die Benennung ω ein, so dass

$$(4.)\qquad \omega = +\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}.$$

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen den angeführten Differentialgleichungen durch die Annahme:

$$(5.)\quad c_1=\alpha,\ c_2=\beta,\ c_3=\gamma, \qquad (5'.)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

mit constanten Werthen von α, β, γ genügt werden kann.

Setzen wir also die Gleichungen (5.) voraus, so folgt zuerst aus (2.):

$$0 = \beta\nu-\gamma\mu,$$
$$0 = \gamma\lambda-\alpha\nu,$$
$$0 = \alpha\mu-\beta\lambda,$$

oder mit Rücksicht auf (4.) und (5'.):

$$(6.)\qquad \lambda=\varepsilon\alpha\omega,\quad \mu=\varepsilon\beta\omega,\quad \nu=\varepsilon\gamma\omega,$$

wo $\varepsilon=+1$ oder $=-1$ ist. Hiermit ergiebt sich aus (3.):

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\omega^2(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2) = -Mg(\alpha\xi_0+\beta\eta_0+\gamma\zeta_0)+h, \\ \varepsilon\omega(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2) = k. \end{cases}$$

Es müssen also ω^2, bezüglich $\varepsilon\omega$, und danach in (6.) auch λ, μ, ν selbst constant sein. Alsdann reduciren sich aber die Gleichungen (1.) auf die folgenden:

$$(8.)\quad \begin{cases} (B-C)\beta\gamma\omega^2 = Mg(\eta_0\gamma-\zeta_0\beta), \\ (C-A)\gamma\alpha\omega^2 = Mg(\zeta_0\alpha-\xi_0\gamma), \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = Mg(\xi_0\beta-\eta_0\alpha). \end{cases}$$

Genügen daher die vier Constanten α, β, γ, ω den Bedingungen (5'.) und (8.), so wird den Differentialgleichungen (1.) und (2.) durch die Integralgleichungen (5.) und (6.) genügt. ***Ertheilt man in dieser Voraussetzung dem um den Punkt O drehbaren Körper die Winkelgeschwindigkeit ω um die durch die Richtungscosinus α, β, γ ihrer Lage im Körper und ihrer Pfeilspitze nach bestimmte Axe und stellt zugleich diese Axe im Raume senkrecht und mit***

ihrer Pfeilspitze nach oben, so verharrt der Körper in dem so hergestellten Bewegungszustand.

Wir wollen eine solche Axe (α, β, γ) eine *„permanente Verticalaxe“* des schweren Körpers nennen.

Zu jedem zulässigen Werthsystem $(\alpha, \beta, \gamma, \omega)$ gehört überdies vermöge des doppelten Werthes von ε in (6.) eine Drehung sowohl in dem einen wie in dem anderen Sinne um die Axe α, β, γ.

§ 2.

Allgemeine Bedeutung der Bedingungsgleichungen.

Die Gleichungen (8.) sind nicht von einander unabhängig, sondern geben mit α, β, γ multiplicirt und addirt eine Identität.

Wir erhalten ferner aus ihnen eine von ω freie Bedingungsgleichung durch Multiplication mit den niemals gleichzeitig verschwindenden Factoren $A\alpha, B\beta, C\gamma$ und nachfolgende Addition, nämlich:

$$(9.) \qquad (B-C)\xi_0\beta\gamma+(C-A)\eta_0\gamma\alpha+(A-B)\zeta_0\alpha\beta = 0.$$

Die Richtungscosinus α, β, γ der permanenten Verticalaxe haben daher ausser der Gleichung (5′.) nur dieser einen Bedingung (9.) zu genügen oder, in etwas anderer Form ausgedrückt:

Die permanente Verticalaxe muss auf dem Kegel zweiter Ordnung liegen, der durch die Gleichung:

$$(10.) \qquad (B-C)\xi_0\eta\zeta+(C-A)\eta_0\zeta\xi+(A-B)\zeta_0\xi\eta = 0$$

in laufenden Coordinaten ξ, η, ζ dargestellt ist.

Wir wollen diesen Kegel den *„Schwerpunktskegel“* des Körpers für den Punkt O nennen. Derselbe ist mit dem Trägheitsellipsoid:

$$(11.) \qquad A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2 = 1$$

nicht coaxial, sondern hängt einerseits von der Grösse der Hauptträgheitsmomente A, B, C, andererseits von der Lage des Schwerpunktes (ξ_0, η_0, ζ_0) gegen die Hauptträgheitsaxen ab. Wir müssen hierfür daran erinnern, dass die Richtung der Hauptträgheitsaxen und die Grösse der Hauptträgheitsmomente für alle möglichen Lagen des Punktes O im Körper in übersichtlicher Weise dargestellt werden mit Hülfe eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades, welches durch die Hauptträgheitsaxen und die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes S bestimmt ist.

zwischen den drei Richtungscosinus c_1, c_2, c_3 und die beiden Integrale:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2) = -Mg(c_1\xi_0+c_2\eta_0+c_3\zeta_0)+h, \\ A\lambda c_1+B\mu c_2+C\nu c_3 = k \end{cases}$$

mit den Integrationsconstanten h und k. Für die absolute Grösse der Winkelgeschwindigkeit (λ, μ, ν) des Körpers um die instantane Drehungsaxe führen wir noch die Benennung ω ein, so dass

$$(4.)\qquad \omega = +\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}.$$

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen den angeführten Differentialgleichungen durch die Annahme:

$$(5.)\quad c_1=\alpha,\ c_2=\beta,\ c_3=\gamma, \qquad (5'.)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

mit constanten Werthen von α, β, γ genügt werden kann.

Setzen wir also die Gleichungen (5.) voraus, so folgt zuerst aus (2.):

$$0 = \beta\nu-\gamma\mu,$$
$$0 = \gamma\lambda-\alpha\nu,$$
$$0 = \alpha\mu-\beta\lambda,$$

oder mit Rücksicht auf (4.) und (5'.):

$$(6.)\qquad \lambda=\varepsilon\alpha\omega,\quad \mu=\varepsilon\beta\omega,\quad \nu=\varepsilon\gamma\omega,$$

wo $\varepsilon=+1$ oder $=-1$ ist. Hiermit ergiebt sich aus (3.):

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\omega^2(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2) = -Mg(\alpha\xi_0+\beta\eta_0+\gamma\zeta_0)+h, \\ \varepsilon\omega(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2) = k. \end{cases}$$

Es müssen also ω^2, bezüglich $\varepsilon\omega$, und danach in (6.) auch λ, μ, ν selbst constant sein. Alsdann reduciren sich aber die Gleichungen (1.) auf die folgenden:

$$(8.)\quad \begin{cases} (B-C)\beta\gamma\omega^2 = Mg(\eta_0\gamma-\zeta_0\beta), \\ (C-A)\gamma\alpha\omega^2 = Mg(\zeta_0\alpha-\xi_0\gamma), \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = Mg(\xi_0\beta-\eta_0\alpha). \end{cases}$$

Genügen daher die vier Constanten α, β, γ, ω den Bedingungen (5'.) und (8.), so wird den Differentialgleichungen (1.) und (2.) durch die Integralgleichungen (5.) und (6.) genügt. ***Ertheilt man in dieser Voraussetzung dem um den Punkt O drehbaren Körper die Winkelgeschwindigkeit ω um die durch die Richtungscosinus α, β, γ ihrer Lage im Körper und ihrer Pfeilspitze nach bestimmte Axe und stellt zugleich diese Axe im Raume senkrecht und mit***

ihrer Pfeilspitze nach oben, so verharrt der Körper in dem so hergestellten Bewegungszustand.

Wir wollen eine solche Axe (α, β, γ) eine *„permanente Verticalaxe"* des schweren Körpers nennen.

Zu jedem zulässigen Werthsystem $(\alpha, \beta, \gamma, \omega)$ gehört überdies vermöge des doppelten Werthes von ε in (6.) eine Drehung sowohl in dem einen wie in dem anderen Sinne um die Axe α, β, γ.

§ 2.

Allgemeine Bedeutung der Bedingungsgleichungen.

Die Gleichungen (8.) sind nicht von einander unabhängig, sondern geben mit α, β, γ multiplicirt und addirt eine Identität.

Wir erhalten ferner aus ihnen eine von ω freie Bedingungsgleichung durch Multiplication mit den niemals gleichzeitig verschwindenden Factoren $A\alpha, B\beta, C\gamma$ und nachfolgende Addition, nämlich:

$$(9.) \qquad (B-C)\xi_0\beta\gamma+(C-A)\eta_0\gamma\alpha+(A-B)\zeta_0\alpha\beta = 0.$$

Die Richtungscosinus α, β, γ der permanenten Verticalaxe haben daher ausser der Gleichung (5′.) nur dieser einen Bedingung (9.) zu genügen oder, in etwas anderer Form ausgedrückt:

Die permanente Verticalaxe muss auf dem Kegel zweiter Ordnung liegen, der durch die Gleichung:

$$(10.) \qquad (B-C)\xi_0\eta\zeta+(C-A)\eta_0\zeta\xi+(A-B)\zeta_0\xi\eta = 0$$

in laufenden Coordinaten ξ, η, ζ dargestellt ist.

Wir wollen diesen Kegel den *„Schwerpunktskegel"* des Körpers für den Punkt O nennen. Derselbe ist mit dem Trägheitsellipsoid:

$$(11.) \qquad A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2 = 1$$

nicht coaxial, sondern hängt einerseits von der Grösse der Hauptträgheitsmomente A, B, C, andererseits von der Lage des Schwerpunktes (ξ_0, η_0, ζ_0) gegen die Hauptträgheitsaxen ab. Wir müssen hierfür daran erinnern, dass die Richtung der Hauptträgheitsaxen und die Grösse der Hauptträgheitsmomente für alle möglichen Lagen des Punktes O im Körper in übersichtlicher Weise dargestellt werden mit Hülfe eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades, welches durch die Hauptträgheitsaxen und die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes S bestimmt ist.

Wählen wir nun nach Belieben eine Erzeugende des Schwerpunktskegels aus, versehen sie in einer ihrer beiden Richtungen mit einer Pfeilspitze und bestimmen damit unzweideutig ihre Richtungscosinus α, β, γ, so haben wir nur noch das zugehörige ω aus einer der Gleichungen (8.) zu bestimmen, im allgemeinen gleichgültig aus welcher. Jedoch ist hierbei in Folge der Form der Gleichungen (8.) von den zwei entgegengesetzten Erzeugenden (α, β, γ) und $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ des Kegels im allgemeinen nur die eine brauchbar, da ω^2 einen positiven Werth erhalten muss. Wir müssen daher immer jede Erzeugende des Kegels je nach ihrer Pfeilspitze doppelt betrachten.

§ 3.

Eine geometrische und mechanische Eigenschaft des Schwerpunktskegels.

Die Gleichung (10.) des Schwerpunktskegels kann in der Form:

$$(12.) \qquad \begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ \xi & \eta & \zeta \\ A\xi & B\eta & C\zeta \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Ist nun (ξ, η, ζ) irgend ein Punkt des Trägheitsellipsoides (11.), so verhalten sich die Richtungscosinus des Perpendikels, welches von O auf die Tangentialebene des Ellipsoides im Punkte (ξ, η, ζ) gefällt wird, wie $A\xi : B\eta : C\zeta$. Wir erhalten in diesem Sinne zu einer beliebigen Axe durch O mit den Richtungscosinus $\xi : \eta : \zeta$ eine bestimmte „Nebenaxe“ $A\xi : B\eta : C\zeta$. Genügt nun die erstere Axe der Gleichung (12.), so enthält, wie die Form der Gleichung sofort zeigt, die Ebene durch die Axe und ihre Nebenaxe den Schwerpunkt; also ergiebt sich:

Der Schwerpunktskegel ist der Ort der Axen, welche die Eigenschaft haben, dass die Ebene durch die Axe und ihre Nebenaxe den Schwerpunkt enthält.

Bekanntlich gilt nun für jede beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt O der Satz, dass die Nebenaxe der instantanen Rotationsaxe die Axe der „Bewegungsgrösse“*) ist. Es folgt daher:

Wenn bei irgend welcher Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt in irgend einem Augenblicke die instantane Rotationsaxe in den Schwerpunktskegel fällt, so liegt gleichzeitig der Schwerpunkt in der Ebene dieser und der Axe der Bewegungsgrösse.

*) Vgl. *Poisson*, Traité de mécanique, 2ième éd., Paris 1833, t. II, p. 131.

§ 4.

Die Lage des Schwerpunktskegels.

Neben dem Schwerpunkte $S = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ müssen wir für die folgenden Entwicklungen noch den Punkt:

$$S' = \left(\frac{\xi_0}{A}, \frac{\eta_0}{B}, \frac{\zeta_0}{C}\right) \tag{13.}$$

einführen. Die Gleichung (12.) zeigt nämlich unmittelbar, dass der Schwerpunktskegel *durch fünf ausgezeichnete Axen* hindurchgeht, nämlich durch die drei Coordinatenaxen $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ und durch die beiden Axen OS und OS'. Da unter den Voraussetzungen:

$$B \neq C, \quad C \neq A, \quad A \neq B; \quad \xi_0 \neq 0, \quad \eta_0 \neq 0, \quad \zeta_0 \neq 0 \tag{14.}$$

keine der beiden Axen OS und OS' in einer Coordinatenebene liegt, und die Ebene durch die beiden Axen OS und OS' durch keine Coordinatenaxe geht, so ergiebt sich:

Unter den Voraussetzungen (14.) *ist der Schwerpunktskegel ein eigentlicher Kegel zweiter Ordnung.*

Wir wollen nun weiterhin, worin keine Beschränkung liegt, die Voraussetzung (14.) dahin specialisiren, dass wir

$$A < B < C; \quad \xi_0 < 0, \quad \eta_0 < 0, \quad \zeta_0 < 0 \tag{15.}$$

annehmen, und wollen auf Grund dieser Annahme die Lage der fünf ausgezeichneten Erzeugenden auf dem Kegel noch näher bestimmen.

Zu dem Ende betrachten wir die Gleichungen der Tangentialebenen des Kegels längs der ξ-, η- und ζ-Axe, welche in laufenden Coordinaten ξ, η, ζ beziehungsweise lauten:

$$\left\{\begin{aligned} T_1(\xi, \eta, \zeta) &= (C-A)\eta_0\zeta + (A-B)\zeta_0\eta = 0, \\ T_2(\xi, \eta, \zeta) &= (A-B)\zeta_0\xi + (B-C)\xi_0\zeta = 0, \\ T_3(\xi, \eta, \zeta) &= (B-C)\xi_0\eta + (C-A)\eta_0\xi = 0, \end{aligned}\right. \tag{16.}$$

und entnehmen hieraus die Vorzeichenbestimmungen:

$$T_1(0, 1, 0) > 0, \quad T_1(0, 0, 1) < 0, \quad T_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) > 0, \quad T_4\left(\frac{\xi_0}{A}, \frac{\eta_0}{B}, \frac{\zeta_0}{C}\right) > 0;$$

$$T_2(0, 0, 1) > 0, \quad T_2(1, 0, 0) > 0.$$

Da die beiden Mäntel des Kegels auf verschiedenen Seiten von jeder seiner Tangentialebenen liegen, so ergiebt sich damit:

Die fünf Halbaxen: $-\xi$, $+\eta$, $-\zeta$, OS, OS' ***liegen auf dem einen („ersten"), die fünf entgegengesetzten Halbaxen auf dem anderen („zweiten") Mantel des Schwerpunktskegels.***

Ueber die Reihenfolge der fünf erstgenannten Halbaxen auf dem ersten Mantel des Kegels erhalten wir weiteren Aufschluss durch Einführung der durch S und je eine Coordinatenaxe gelegten Ebenen:

$$(17.)\qquad \begin{cases} S_1(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \eta_0\zeta - \zeta_0\eta = 0, \\ S_2(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \zeta_0\xi - \xi_0\zeta = 0, \\ S_3(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \xi_0\eta - \eta_0\xi = 0. \end{cases}$$

Es wird nämlich:

$$S_2(0,\ 0,\ -1) < 0, \quad S_2\left(\frac{\xi_0}{A},\ \frac{\eta_0}{B},\ \frac{\zeta_0}{C}\right) > 0, \quad S_2(-1,\ 0,\ 0) > 0.$$

Verbinden wir daher die eine ausgezeichnete Halberzeugende $+\eta$ des ersten Kegelmantels durch Transversalebenen mit den vier andern ausgezeichneten Halberzeugenden, so ist (vgl. Fig. 2) die Reihenfolge der vier Transversalebenen diese: $(+\eta, -\xi)$, $(+\eta, S')$, $(+\eta, S)$ und $(+\eta, -\zeta)$. (Für die Figuren setzen wir voraus, dass das Axensystem $O\xi\eta\zeta$ positiv orientirt sei, d. h. in dem sphärischen Dreieck $(+\xi, +\eta, +\zeta)$, welches die positiven Halbaxen des Systems auf einer um O beschriebenen Kugel bestimmen, die Punkte $+\xi$, $+\eta$, $+\zeta$ im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers auf einander folgen). Es ergiebt sich somit:

Auf dem ersten Mantel des Schwerpunktskegels, auf welchem sich der Schwerpunkt S befindet, folgen die fünf ausgezeichneten Halberzeugenden in der Reihenfolge:

$$(18.)\qquad -\xi,\ +\eta,\ -\zeta,\ OS,\ OS',\ -\xi$$

auf einander.

Zur Vereinfachung der folgenden Darstellung wollen wir die Durchschnittscurve des Schwerpunktskegels mit einer um den Punkt O beschriebenen Kugel etwa vom Radius 1 einführen und kurz als ***„Schwerpunktscurve"*** bezeichnen. Indem wir uns unter α, β, γ mit Hinblick auf (5'.) die Coordinaten der Punkte auf der Kugel denken, haben wir in der Gleichung (9.) die Gleichung der Schwerpunktscurve vor uns. Jedem Punkte (α, β, γ) der Curve entspricht eine von O nach dem Punkte hinlaufende, also mit bestimmter Pfeilspitze versehene Erzeugende des Schwerpunktskegels und umgekehrt.

In Fig. 3 sind die Schwerpunktscurve sowie die Durchschnittskreise der Ebenen T_1, T_2, T_3 in (16.) mit der Kugel in schräger Parallelprojection auf die $\eta\zeta$-Ebene dargestellt; es sind $+\xi$, $+\eta$, $+\zeta$, $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ die Schnittpunkte der Coordinatenaxen, ferner:

$$(19.)\quad \begin{cases} s = \left(\frac{\xi_0}{\varrho_0}, \frac{\eta_0}{\varrho_0}, \frac{\zeta_0}{\varrho_0}\right); \quad \varrho_0 = +\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2}, \\ s' = \left(\frac{\xi_0}{A\sigma_0}, \frac{\eta_0}{B\sigma_0}, \frac{\zeta_0}{C\sigma_0}\right); \quad \sigma_0 = +\sqrt{\frac{\xi_0^2}{A^2}+\frac{\eta_0^2}{B^2}+\frac{\zeta_0^2}{C^2}} \end{cases}$$

die Schnittpunkte der Halbstrahlen OS und OS' mit der Kugel, $-s$ und $-s'$ die diametral gegenüberliegenden Punkte. Nach (18.) liegen die fünf Punkte $-\xi$, $+\eta$, $-\zeta$, s, s' in dieser Reihenfolge auf dem „ersten", die fünf Punkte $+\xi$, $-\eta$, $+\zeta$, $-s$, $-s'$ ebenso auf dem „zweiten Oval" der Schwerpunktscurve.

§ 5.

Zulässige und unzulässige Axen des Schwerpunktskegels.

Zu jeder vom Punkte O nach einem Punkte (α, β, γ) der Schwerpunktscurve hin gezogenen Axe (α, β, γ) liefern, wie wir zu Ende von § 2 bemerkten, die Gleichungen (8.) einen Werth von ω^2. Je nachdem derselbe positiv oder negativ ausfällt, ist die Axe als permanente Verticalaxe zulässig oder unzulässig, und werden wir dementsprechend den Punkt (α, β, γ) als zulässigen oder unzulässigen Punkt der Schwerpunktscurve bezeichnen. Da nun nach (8.) diametral gegenüberliegende Punkte im allgemeinen von verschiedenem Charakter sind, brauchen wir nur längs des einen Ovals der Curve den Charakter der Punkte zu bestimmen.

Betrachten wir das erste Oval (vgl. Fig. 3), so ist dasselbe, wie aus (9.) und (18.) hervorgeht, dem sphärischen Dreieck $(-\xi, +\eta, -\zeta)$ umbeschrieben, indem es die drei angrenzenden Octanten der Kugelfläche in der Weise durchschneidet, dass die Abschnitte $(+\eta, -\zeta)$, $(-\zeta, -\xi)$, $(-\xi, +\eta)$ des Ovals beziehungsweise in den Octanten $(\alpha, \beta, \gamma) = (++-)$, $(---)$, $(-++)$ liegen. Diese Bemerkung reicht aus, um mit Benutzung von (15.) die Vorzeichen der linken Seiten der Gleichungen (8.) für einen Punkt (α, β, γ) des Ovals zu entnehmen. Die rechten Seiten der Gleichungen (8.) sind abgesehen von dem positiven Factor Mg nach (17.) mit $S_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $S_2(\alpha, \beta, \gamma)$, $S_3(\alpha, \beta, \gamma)$ zu bezeichnen. Diese Grössen S_1, S_2, S_3 wechseln längs des Ovals ihr Vorzeichen nur in den Punkten $-\xi$, $+\eta$, $-\zeta$ und s. Es ist aber in diesen vier Punkten beziehungsweise $S_1 = 0, +, +, 0;$

$S_2 = +, 0, -, 0$; $S_3 = -, -, 0, 0$. Hiernach ergeben sich die Vorzeichen der linken (l) und rechten (r) Seiten der drei Gleichungen (8.) nach folgender Tabelle:

(20.)

Abschnitt des Ovals.	1. Gleichung		2. Gleichung		3. Gleichung	
	l	r	l	r	l	r
$(+\eta, -\zeta)$	+	+	−	−	−	−
$(-\zeta, s)$	−	+	+	−	−	+
$(s, s', -\xi)$	−	−	+	+	−	−
$(-\xi, +\eta)$	−	+	−	+	+	−

Somit sind die beiden Seiten einer jeden Gleichung (8.) von gleichem Vorzeichen für den ersten und dritten, von ungleichem für den zweiten und vierten der genannten vier Abschnitte des ersten Ovals. Die diametral gegenüberliegenden Abschnitte des zweiten Ovals haben je den umgekehrten Charakter.

Denken wir uns die zulässigen Abschnitte schraffirt, so ergiebt sich (vgl. Fig. 4) der Satz:

I. ***Auf jedem der beiden Ovale der Schwerpunktscurve wechseln zwei schraffirte mit zwei unschraffirten Abschnitten ab, und zwar sind schraffirt die beiden Abschnitte*** $(+\eta, -\zeta)$ ***und*** $(s, s', -\xi)$ ***des ersten,*** $(-s, +\zeta)$ ***und*** $(-\eta, +\xi)$ ***des zweiten Ovals, unschraffirt die beiden Abschnitte*** $(-\zeta, s)$ ***und*** $(-\xi, +\eta)$ ***des ersten,*** $(+\zeta, -\eta)$ ***und*** $(+\xi, -s', -s)$ ***des zweiten Ovals.***

Hiernach können wir uns über die zulässigen Axen des Schwerpunktskegels folgendermaassen aussprechen:

II. ***Diejenigen und nur diejenigen Axen des Schwerpunktskegels, welche vom Punkte O nach einem Punkte einer der schraffirten Abschnitte der Schwerpunktscurve hinlaufen, sind, vertical und mit ihrer Pfeilspitze nach oben gestellt, bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit*** ω ***permanente Rotationsaxen des um O drehbaren schweren Körpers.***

Was den Werth von ω betrifft, so bestimmt sich derselbe für jeden Punkt (α, β, γ) eines schraffirten Abschnittes aus einer der Gleichungen (8.). Jedoch haben wir hierbei, indem wir zunächst noch an der Voraussetzung (14.), bezw. (15.) festhalten, folgende besonderen Fälle zu erwähnen.

Für die Punkte $\pm\xi$ oder $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pm 1, 0, 0)$ ist die erste Gleichung (8.) von selbst erfüllt und die beiden anderen geben $\omega = \infty$; ähnliches gilt für die Punkte $\pm\eta$ und $\pm\zeta$, also:

III. ***Eine Hauptträgheitsaxe kann stets, mit ihrer Pfeilspitze nach oben oder nach unten gestellt, permanente Verticalaxe sein, jedoch nur mit der Winkelgeschwindigkeit*** ∞.

Für die Punkte s und $-s$, mit $\alpha : \beta : \gamma = \xi_0 : \eta_0 : \zeta_0$, geben die Gleichungen (8.) $\omega = 0$, d. h.

IV. ***Die Axe durch den Schwerpunkt kann stets, mit ihrer Pfeilspitze nach oben oder nach unten gestellt, permanente Verticalaxe sein, jedoch nur mit der Winkelgeschwindigkeit*** 0.

Die mit diesen beiden Sätzen III. und IV. erledigten Axen (α, β, γ) gehören zu den Endpunkten der vier schraffirten Abschnitte der Schwerpunktscurve.

V. ***Für alle übrigen Axen, die mit ihrer Pfeilspitze stets nach oben gestellt werden müssen, ergiebt sich ein von*** 0 ***und*** ∞ ***verschiedener Werth der Winkelgeschwindigkeit*** ω.

Im besonderen ist für den Punkt s' (vgl. (19.)):

$$\omega^2 = Mg\sigma_0,$$

während der Punkt $-s'$ unzulässig ist.

Mit ω^2 ist nach (7.) auch die Constante h der lebendigen Kraft bestimmt. In dieser Beziehung mögen besonders die den beiden Punkten s und $-s$ entsprechenden Werthe $h = Mg\varrho_0$ und $h = -Mg\varrho_0$ (vgl. (19.)) hervorgehoben werden. Der letztere ist der kleinste der vermöge der ersten Gleichung (3.) überhaupt möglichen Werthe von h und gehört zu derjenigen Ruhelage des Körpers, bei welcher der Schwerpunkt S senkrecht unter dem Drehungspunkte O gelegen ist.

§ 6.

Ausartung des Schwerpunktskegels für $A < B < C$ bei besonderen Lagen von S.

Von den Voraussetzungen (15.), welche wir in den §§ 4 und 5 zu Grunde legten, lassen wir im vorliegenden § 6 nur noch die eine:

(21.) $$A < B < C$$

bestehen, die anderen auf ξ_0, η_0, ζ_0 bezüglichen theilweise oder ganz fallen. Es soll also der Schwerpunkt S jetzt entweder in einer Hauptebene oder in einer Hauptaxe oder im Mittelpunkt des Trägheitsellipsoides (11.) gelegen sein.

1. ***Der Schwerpunkt liegt in einer Hauptebene.*** Wenn eine der drei Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 verschwindet, ergiebt sich sofort aus der Gleichung (10.) des Schwerpunktskegels der folgende Satz:

Kommt der Schwerpunkt in die Ebene zweier Hauptaxen des Trägheitsellipsoids zu liegen, so zerfällt der Schwerpunktskegel in ein Ebenenpaar, welches aus jener Ebene und einer durch die dritte Hauptaxe gehenden Ebene besteht.

Um hierauf näher einzugehen, nehmen wir den Fall $\xi_0 = 0$, wobei neben (21.), wie in (15.):

$$(21'.) \qquad \eta_0 < 0, \quad \zeta_0 < 0$$

sei. Der Schwerpunktskegel besteht aus den Ebenen $\xi = 0$ und $T_1 = 0$ (vgl. (16.)), die Schwerpunktscurve aus den entsprechenden grössten Kreisen der Einheitskugel. Es geht dann aus der ersten Gleichung (16.) sofort hervor, dass der eine grösste Kreis $\xi = 0$ von dem anderen $T_1 = 0$ in einem Punkte t_1 des Quadranten $(+\eta, +\zeta)$ und in einem Punkte $-t_1$ des Quadranten $(-\eta, -\zeta)$ geschnitten wird (vgl. Fig. 5). Für die Lage der beiden Punkte t_1 und $-t_1$ ergiebt sich aus den Ungleichungen:

$$T_1(0, -1, 0) < 0, \; T_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) > 0, \; T_1\left(\frac{\xi_0}{A}, \frac{\eta_0}{B}, \frac{\zeta_0}{C}\right) > 0, \; T_1(0, 0, -1) > 0,$$

dass der Punkt $-t_1$ den Punkt $-\eta$ von den Punkten s', s und $-\zeta$ des Kreises $\xi = 0$ trennt, während in Folge der Ungleichungen:

$$S_1\left(\frac{\xi_0}{A}, \frac{\eta_0}{B}, \frac{\zeta_0}{C}\right) < 0, \quad S_1(0, 0, -1) > 0$$

(vgl. (17.)) wiederum s zwischen s' und $-\zeta$ liegt.

Nachdem so die Lage der beiden grössten Kreise der Schwerpunktscurve bestimmt ist, kann die erforderliche Schraffirung entweder durch Grenzübergang von Fig. 4 auf Fig. 5 übertragen oder direct aus den Formeln (8.) abgeleitet werden.

Um den ersteren Weg einzuschlagen, bemerken wir, dass aus dem ersten und zweiten Oval der Fig. 4 beziehungsweise die beiden Zweiecke $(-\xi, t_1, +\eta, -\zeta, s, s', -t_1, -\xi)$ und $(+\xi, -t, -\eta, +\zeta, -s, -s', t_1, +\xi)$ in Fig. 5 entstehen und alsdann für deren Schraffirung und ihre Bedeutung die Sätze § 5, I und II unverändert gelten. Jedoch können wir statt durch Satz I die Schraffirung auch durch folgenden Satz beschreiben:

I. *Von den beiden Kreisen der Schwerpunktscurve sind schraffirt die drei Abschnitte* $(+\eta, -\zeta)$, $(s, s', -\eta)$, $(+\zeta, -s)$ *des Kreises* $\xi = 0$ *und die*

Hälfte $(+\xi, -t_1, -\xi)$ ***des Kreises*** $T_1 = 0$, ***unschraffirt die drei Abschnitte*** $(-\zeta, s)$, $(-\eta, +\zeta)$, $(-s, +\eta)$ ***des ersteren und die Hälfte*** $(-\xi, t_1, +\xi)$ ***des letzteren.***

Um dies auch auf analytischem Wege herzuleiten, haben wir die Formeln (8.) mit $\xi_0 = 0$ in der Form zu schreiben:

$$(22.) \qquad \begin{cases} (B-C)\beta\gamma\omega^2 = Mg(\eta_0\gamma - \zeta_0\beta), \\ (C-A)\gamma\alpha\omega^2 = Mg\zeta_0\alpha, \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = -Mg\eta_0\alpha. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen verlangt, dass $\beta\gamma$ und $S_1(\alpha, \beta, \gamma)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben und dies ist für alle Punkte innerhalb der drei Zweiecke $(+\xi, +\eta, -\xi, -\zeta)$, $(+\xi, s, -\xi, -\eta)$, $(+\xi, +\zeta, -\xi, -s)$ erfüllt, für den übrigen Theil der Kugelfläche nicht. Die in den genannten drei Zweiecken gelegenen Abschnitte der beiden grössten Kreise $\xi = 0$ und $T_1 = 0$ sind also zu schraffiren, was wieder die im vorigen Satze beschriebene und in Fig. 5 dargestellte Schraffirung giebt.

Die beiden anderen Gleichungen (22.) sind auf den Kreis $\xi = 0$ oder $\alpha = 0$ nicht anwendbar, dagegen auf den Kreis $T_1 = 0$; für diesen geben sie die Forderung $\beta < 0$ und $\gamma < 0$, welche in der Schraffirung der Hälfte $(+\xi, -t_1, -\xi)$ ihren Ausdruck findet.

Der Werth von ω kann für die Punkte (α, β, γ) der schraffirten Abschnitte der beiden Kreise der Schwerpunktscurve aus den Gleichungen (22.) bestimmt werden und kann es stets aus der ersten Gleichung, ausser für die Punkte $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pm 1, 0, 0)$, für die sich, statt aus jener, aus den beiden letzten Gleichungen $\omega = \infty$ ergiebt. Es gelten also in dieser Beziehung auch hier wieder die Sätze § 5, III—V.

Zur Erledigung der beiden dem Falle $\xi_0 = 0$ analogen Fälle $\eta_0 = 0$ und $\zeta_0 = 0$ mögen nur die Figuren 6 und 7 dienen, deren Schraffirung sich aus § 5, I ergiebt, indem wir uns die Zweiecke:

$(-\xi, t_2, +\eta, -t_2, -\zeta, s, s', -\xi)$ und $(+\xi, -t_2, -\eta, t_2, +\zeta, +\xi)$ in Fig. 6,

$(-\xi, +\eta, t_3, -\zeta, -t_3, s, s', -\xi)$ und $(+\xi, -\eta, -t_3, +\zeta, t_3, +\xi)$ in Fig. 7

bezüglich aus dem ersten und zweiten Oval der Fig. 4 entstanden denken.

2. ***Der Schwerpunkt liegt in einer Hauptaxe.*** Mit der Annahme, dass zwei von den Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 verschwinden, giebt die Gleichung (10.) sofort das Resultat:

Kommt der Schwerpunkt in eine Hauptaxe des Trägheitsellipsoides zu

liegen, so zerfällt der Schwerpunktskegel in die zwei durch diese Axe gehenden Hauptebenen.

Was die Schraffirung der beiden grössten Kreise angeht, aus denen jetzt die Schwerpunktscurve besteht, so ergiebt sich dieselbe leicht durch Grenzübergang aus den Figuren 5—7.

So erhält man aus Fig. 6 oder Fig. 7, indem $s = s' = -\xi$ wird, die Fig. 8, wo nun S auf der negativen ξ-Axe liegt (in Fig. 8 ist S zufällig *inner*halb der Kugel angenommen). Gehen wir etwa von Fig. 6 aus, so fliessen von den drei schraffirten Abschnitten des Kreises $\eta = 0$ die beiden Abschnitte $(-\zeta, +\xi)$ und $(-s, +\zeta)$ in einen Halbkreis $(-\zeta, +\xi, +\zeta)$ zusammen und der dritte Abschnitt $(-\xi, s)$ reducirt sich auf den Punkt $-\xi$. Zugleich fällt der Kreis $T_2 = 0$ mit dem Kreise $\zeta = 0$ zusammen, indem der Punkt t_2 nach $-\xi$ und $-t_2$ nach $+\xi$ rückt, ohne dass hierbei die Theilung des erstgenannten Kreises in eine schraffirte und eine unschraffirte Hälfte sich ändert. An Stelle von § 5, I haben wir daher jetzt den folgenden Satz (vgl. Fig. 8):

I. ***Von den beiden grössten Kreisen der Schwerpunktscurve ist je die eine Hälfte schraffirt, die andere unschraffirt.***

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch direct aus den Formeln (8.), die mit $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ lauten:

$$(23.)\qquad \begin{cases} (B-C)\beta\gamma\omega^2 &= 0, \\ (C-A)\gamma\alpha\omega^2 &= -Mg\xi_0\gamma, \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 &= Mg\xi_0\beta, \end{cases}$$

mit der Voraussetzung $\xi_0 < 0$. Die erste Bedingung (23.) ist für alle Punkte (α, β, γ) der Schwerpunktscurve, die aus den Kreisen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ besteht, von selbst erfüllt. Für den einen Kreis $\beta = 0$ fällt die dritte Gleichung fort und giebt die zweite $\alpha > 0$; für den andern Kreis $\gamma = 0$ fällt die zweite fort und giebt die dritte $\alpha > 0$. Es sind also die Halbkreise $(-\eta, +\xi, +\eta)$ und $(+\zeta, +\xi, -\zeta)$ zu schraffiren.

Bezüglich des zu jedem Punkte (α, β, γ) der Schwerpunktscurve gehörigen Werthes ω tritt hier gegenüber den bisherigen allgemeinen Fällen ein neuer Umstand hervor. Während nämlich die zweite Gleichung (23.) für alle Punkte des Kreises $\beta = 0$ und die dritte für alle Punkte des Kreises $\gamma = 0$ einen bestimmten Werth von ω liefert, speciell den Werth $\omega = \infty$ für die Punkte $\pm\zeta$ und $\pm\eta$, bleibt für die beiden gemeinsamen

Punkte $\pm\xi$ beider Kreise der Werth von ω völlig unbestimmt. Es tritt daher jetzt an Stelle der beiden Sätze § 5, III. und IV. der folgende Satz:

III., IV. ***Eine Hauptträgheitsaxe kann stets, mit ihrer Pfeilspitze nach oben oder nach unten gestellt, permanente Verticalaxe sein, und zwar die durch den Schwerpunkt gehende mit jeder beliebigen Winkelgeschwindigkeit, die beiden anderen nur mit der Winkelgeschwindigkeit*** ∞.

Hieran schliesst sich unverändert der Satz § 5, V.; auch der Satz § 5, II. bleibt bestehen, nur mit der Ausnahme, dass für die Axen Os und Os' die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr *bestimmt* ist.

Wir stellen die den drei Fällen $\eta_0 = 0,\ \zeta_0 = 0;\ \zeta_0 = 0,\ \xi_0 = 0$ und $\xi_0 = 0,\ \eta_0 = 0$ entsprechenden Figuren 8—10 alle drei zusammen, weil sie insofern verschieden sind, als die beiden schraffirten, in zwei Hauptebenen gelegenen Halbkreise in Fig. 8 durch die dritte Hauptebene vom Schwerpunkt S geschieden sind, in Fig. 10 mit dem Schwerpunkt auf gleicher Seite der dritten Hauptebene liegen, in Fig. 9 aber selbst durch die dritte Hauptebene von einander getrennt werden. In Fig. 8 tritt ausserdem der Punkt $-\xi$, in Fig. 10 der Punkt $+\zeta$, in Fig. 9 kein Punkt als isolirter Punkt zu den schraffirten Abschnitten der Schwerpunktscurve hinzu. In diesem verschiedenen Verhalten der drei coordinirten Fälle kommt die Voraussetzung $A < B < C$ zum Ausdruck.

3. ***Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkte des Trägheitsellipsoides.*** Mit $\xi_0 = 0,\ \eta_0 = 0,\ \zeta_0 = 0$ hört der Schwerpunktskegel (10.) auf zu existiren. Es können dann nicht blos ∞^1, sondern ∞^2 Axen durch den Punkt O permanente Rotationsaxen sein, jedoch nach (8.) nur mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0$, es sei denn, dass zwei von den Grössen α, β, γ verschwinden, worauf ω unbestimmt wird. Dies tritt bei den drei Hauptträgheitsaxen ein, die allein als permanente Rotationsaxen im gewöhnlichen Sinne übrig bleiben und zwar, da die Beziehung zur Schwerkraft aufhört, nicht nur bei verticaler, sondern bei beliebiger Stellung.

§ 7.

Ausartung des Schwerpunktskegels für $B = C$ und $A = B$.

Wir haben endlich noch den Uebergang auf die beiden Fälle vorzunehmen, wo mit $A < B = C$ das Trägheitsellipsoid ein verlängertes oder mit $A = B < C$ ein abgeplattetes Rotationsellipsoid wird, ersteres mit der ξ-Axe, letzteres mit der ζ-Axe als Rotationsaxe. In jedem dieser beiden

Fälle bleibt zu unterscheiden, ob der Schwerpunkt in allgemeiner oder in besonderer Lage sich befindet.

1. ***Der Schwerpunkt liegt allgemein,*** also weder in der Aequatorialebene noch in der Rotationsaxe des Trägheitsellipsoides. Wir können aber ohne Beschränkung im Falle $B = C$ die Annahme $\zeta_0 = 0$ und im Falle $A = B$ diejenige $\xi_0 = 0$ machen, während übrigens, wie in (15.) $\xi_0 < 0$, $\eta_0 < 0$ bezw. $\eta_0 < 0$, $\zeta_0 < 0$ sein soll. Die Gleichung (10.) reducirt sich in beiden Fällen auf $\eta_0 \zeta \xi = 0$, d. h.:

Der Schwerpunktskegel besteht aus der Aequatorialebene und der durch den Schwerpunkt gehenden Meridianebene.

Um auf den einen Fall, $A < B = C$, $\zeta_0 = 0$ näher einzugehen, können wir an Fig. 7 anknüpfen, bei welcher ebenfalls $\zeta_0 = 0$ angenommen war. Wird nun ausserdem $B = C$, so geht nach (16.) der grösste Kreis $T_3 = 0$ der Fig. 7, indem t_3 nach $+\eta$ fällt, in den grössten Kreis $\xi = 0$ über, sodass die Schwerpunktscurve nunmehr aus dem Aequatorialkreis $\xi = 0$ oder $\alpha = 0$ und dem durch s gehenden Meridiankreis $\zeta = 0$ oder $\gamma = 0$ besteht. Was die Schraffirung der Curve betrifft, so bleibt sie für den Meridiankreis $\gamma = 0$ dieselbe, wie in Fig. 7, während die Schraffirung des halben Kreises $T_3 = 0$ in die Schraffirung des vollen Kreises $\alpha = 0$ übergeht, indem der unschraffirte Halbkreis $(+\zeta, -t_3, -\zeta)$ der Fig. 7 beim Zusammenfallen des Punktes $-t_3$ mit $-\eta$ an den schraffirten Quadranten $(+\xi, -\eta)$ des Kreises $\gamma = 0$ anstösst und dessen Schraffirung aufnimmt. Diese Bemerkungen finden ihre nähere Begründung in den Formeln (8.), welche jetzt lauten:

$$(24.) \qquad \begin{cases} 0.\beta\gamma\omega^2 = Mg\eta_0\gamma, \\ (B-A)\gamma\alpha\omega^2 = -Mg\xi_0\gamma, \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = My(\xi_0\beta - \eta_0\alpha). \end{cases}$$

Für den Meridiankreis $\gamma = 0$ fallen die beiden ersten Gleichungen (24.) fort; die dritte aber verlangt die Schraffirung der Abschnitte $(+\xi, -\eta)$, $(s, -\xi)$ und $(+\eta, -s)$ dieses Kreises und giebt zugleich für jeden Punkt $(\alpha, \beta, 0)$ desselben einen bestimmten, von 0 und ∞ verschiedenen Werth von ω, ausser für die beiden Punkte s und $-s$, wo $\omega = 0$, und die vier Punkte $\pm\xi$, $\pm\eta$, wo $\omega = \infty$ wird. Den Punkten $(0, \beta, \gamma)$ des Aequatorialkreises $\alpha = 0$ legen die Gleichungen (24.) eine Bedingung nicht mehr auf, können aber für diese Punkte auch nur mit dem Werthe $\omega = \infty$ erfüllt werden. Wir erhalten also in der That die vorhin aus Fig. 7 abgeleitete

und in Fig. 11 dargestellte Schraffirung. In analoger Weise bezieht sich Fig. 12 auf den Fall $A = B$, $\xi_0 = 0$.

Zusammenfassend bemerken wir, dass der Satz § 5, I. zu ersetzen ist durch den Satz:

I. ***Von den beiden Kreisen der Schwerpunktscurve ist der Aequatorialkreis vollständig zu schraffiren, während auf dem Meridiankreis drei schraffirte Abschnitte mit drei unschraffirten abwechseln.***

Die übrigen Sätze § 5, II—V. bleiben bestehen, wenn wir nur festsetzen, dass neben der Rotationsaxe auch sämmtliche Axen der Aequatorialebene des Rotationsellipsoides Hauptträgheitsaxen genannt werden.

2. ***Der Schwerpunkt liegt in der Aequatorialebene.*** Wird in dem vorhin zuerst betrachteten Falle $B = C$, $\zeta_0 = 0$ auch noch $\xi_0 = 0$, so besteht zwar der Schwerpunktskegel nach wie vor aus der Aequatorialebene und der durch den Schwerpunkt gehenden Meridianebene, aber die Schraffirung der beiden grössten Kreise $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ der Schwerpunktscurve vereinfacht sich, indem von den drei schraffirten Abschnitten des Kreises $\gamma = 0$ zwei zusammenfliessen und einer sich auf einen Punkt reducirt. So geht Fig. 11, indem s nach $-\eta$ rückt, in Fig. 13 über.

Die Gleichungen (8.) erhalten die Form:

$$(25.)\qquad \begin{cases} 0.\beta\gamma\omega^2 = Mg\eta_0\gamma, \\ (B-A)\gamma\alpha\omega^2 = 0, \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = -Mg\eta_0\alpha. \end{cases}$$

Die mittlere Gleichung (25.) fällt für alle Punkte der Schwerpunktscurve fort; für den Kreis $\alpha = 0$ fällt auch die dritte fort und giebt die erste $\omega = \infty$; für den Kreis $\gamma = 0$ fällt die erste fort und giebt die dritte die Forderung $\beta < 0$ und zugleich die Bestimmung des Werthes ω, ausgenommen für die beiden Punkte $\pm\eta$, wo ω unbestimmt wird. Zusammenfassend haben wir, da Entsprechendes auch für den Fall $A = B$, $\xi_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ (vgl. Fig. 14) sich ergiebt, das Resultat:

I. ***Von den beiden Kreisen der Schwerpunktscurve ist der Aequatorialkreis vollständig zu schraffiren, der Meridiankreis aber zur Hälfte.***

Der Unterschied zwischen dem Fall des verlängerten und dem des abgeplatteten Rotationsellipsoides macht sich bei den Figuren 13 und 14 darin geltend, dass in Fig. 13 die auf Seite des Schwerpunktes, in Fig. 14 die dem Schwerpunkt gegenüber liegende Hälfte des Meridiankreises schraffirt erscheint.

Die beiden Sätze § 5, III. und IV. werden, entsprechend wie in § 6 unter 2, gegenwärtig durch folgenden Satz mit der in § 7 unter 1 (am Schluss) erwähnten allgemeineren Bedeutung des Begriffes der Hauptträgheitsaxen ersetzt:

III., IV. ***Eine Hauptträgheitsaxe kann stets, mit ihrer Pfeilspitze nach oben oder nach unten gestellt, permanente Verticalaxe sein, und zwar die durch den Schwerpunkt gehende mit jeder beliebigen Winkelgeschwindigkeit, alle übrigen nur mit der Winkelgeschwindigkeit*** ∞.

Auch der Satz § 5, V. bleibt bestehen und § 5, II. gilt mit der in § 6 unter 2 angegebenen Beschränkung.

3. ***Der Schwerpunkt liegt in der Rotationsaxe.*** In den beiden Fällen $B = C$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ und $A = B$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, wo der Schwerpunkt auf der Rotationsaxe des verlängerten oder abgeplatteten Rotationsellipsoides liegt, hört nach (10.) der Schwerpunktskegel auf zu existiren; es sind nicht mehr ∞^1, sondern ∞^2 permanente Verticalaxen vorhanden. Im ersteren Falle werden die Gleichungen (8.), indem die erste derselben wegfällt:

$$(26.) \qquad \begin{cases} (B-A)\gamma\alpha\omega^2 = -Mg\xi_0\gamma, \\ (A-B)\alpha\beta\omega^2 = Mg\xi_0\beta. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen geben für die Punkte $\pm\xi$ keinen bestimmten Werth von ω, für jeden anderen Punkt (α, β, γ) der Kugelfläche einerseits die Bedingung $\alpha > 0$, andererseits einen bestimmten Werth von ω, der für die Punkte $\alpha = 0$ unendlich wird. Es ist somit, im Sinne der bisherigen Schraffirung der Schwerpunktscurve, jetzt die ganze Fläche derjenigen Halbkugel zu schraffiren, die durch die Aequatorialebene des verlängerten Rotationsellipsoides vom Schwerpunkt getrennt ist. Im Falle des abgeplatteten Rotationsellipsoides würde umgekehrt diejenige Halbkugel zu schraffiren sein, welche mit dem Schwerpunkt auf gleicher Seite der Aequatorialebene liegt.

Die endlich noch zurückbleibenden Specialfälle $B = C$, $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ und $A = B$, $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ und $A = B = C$ bedürfen keiner weiteren Ausführung.

Rostock, 16. Januar 1894.

Arithmetische Studien über den „letzten“ *Fermat*schen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist.

(Von Herrn *E. Wendt.*)

1.

Alle Versuche, die bisher angestellt wurden, den letzten *Fermat*schen Satz allgemein zu beweisen, d. h. zu zeigen, dass die Gleichung

$$a^n = b^n + c^n \tag{1.}$$

für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist, sind misslungen. Und unter allen diesen Untersuchungen sind die *Kummer*schen die einzigen, in denen die Richtigkeit des Satzes für eine grössere Klasse von Werthen des Exponenten n dargethan wird, sonst sind nur für die Fälle $n = 3, 4, 5, 7, 14$ Beweise gegeben worden, welche einer Verallgemeinerung nicht fähig sind.

Alle diese Beweise haben das gemeinsame, dass erst nachgewiesen wird, dass eine der Zahlen a, b, c durch n theilbar sein müsse. Selbst dieser erste Theil des Beweises, den man nothwendig zuerst führen muss, falls man die Unmöglichkeit der Gleichung (1.) durch Zerlegung in Factoren nachweisen will, ist noch nicht allgemein geliefert worden. Einen Versuch, denselben mit den Elementen der Zahlentheorie zu geben, stellt die vorliegende Arbeit vor. Es ist mir dies aber bloss unter einigen Voraussetzungen über die Zahl n gelungen, deren Bedeutung in der Nummer 2 erörtert wird. Die Hauptuntersuchungen über die Gleichung (1.) sind in der Nummer 3 enthalten, während die Nummer 4 nur noch einige Bemerkungen enthält, die für weitere Untersuchungen werthvoll sein können.

2.

In den nachstehenden Untersuchungen wird folgende Frage, die schon an und für sich sehr interessant ist, und deren Zusammenhang mit

dem *Fermat*schen Satze unmittelbar auffällt, eine wichtige Rolle spielen, und deswegen soll sie auch an die Spitze dieser Arbeit gestellt werden. Sie lautet:

Welches sind die Lösungen der Congruenz

$$(2.) \qquad r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{(mn+1)},$$

wenn r, s, t positive oder negative ganze Zahlen, n und $mn+1=p$ ungerade Primzahlen sind?

Zunächst ist klar, dass die Congruenz (2.) stets erfüllt ist, falls man nur annimmt, dass eine der Zahlen r, s, t durch p theilbar ist. Es fragt sich nur, ob es noch andere Lösungen giebt. Es sei also keine der Zahlen r, s, t durch p theilbar; dann lässt sich stets eine Zahl r' finden, dergestalt dass

$$rr' \equiv 1 \pmod{p}$$

ist. Multiplicirt man beide Seiten der Congruenz (2.) mit r'^n, so nimmt sie die Form an

$$(3.) \qquad 1+u^n \equiv v^n \pmod{p}.$$

Erhebt man diese auf die $m$te Potenz und berücksichtigt, dass nach dem bekannten *Fermat*schen Satze

$$(4.) \qquad u^{mn} \equiv v^{mn} \equiv 1$$

ist, so erhält man

$$(5.) \qquad 1+\binom{m}{1}u^n+\binom{m}{2}u^{2n}+\cdots+\binom{m}{m-1}u^{(m-1)n} \equiv 0.$$

Bezeichnet man daher die orthosymmetrische Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{m-2} & \binom{m}{m-1} \\ \binom{m}{m-1} & 1 & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{m-3} & \binom{m}{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \cdots & 1 & \binom{m}{1} \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{m-1} & 1 \end{vmatrix}$$

mit D_m, so folgert man mit Hülfe bekannter zahlentheoretischer Schlüsse, dass D_m durch p theilbar sein muss, wenn die Congruenz (5.) bestehen soll, und umgekehrt, dass diese Lösungen besitzt, falls D_m durch p theilbar ist. Es gilt daher der folgende

***Satz* I:** Damit die Congruenz

$$r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{p},$$

wo p eine Primzahl von der Form $mn+1$ ist, nur solche Lösungen besitzt, in denen eine der Zahlen r, s, t den Divisor p hat, ist nothwendig und hinreichend, dass D_m ***nicht*** durch p theilbar ist.

Jetzt handelt es sich darum, die Theiler von D_m zu untersuchen, und zwar fragt es sich zunächst, ob D_m gleich Null sein kann.

Nach einem wichtigen Satze, der sich auf orthosymmetrische Determinanten bezieht und für den ***Stern*** im 73. Bande dieses Journals einen einfachen Beweis gegeben hat, kann man D_m in die Form setzen

$$D_m = \prod_{k=1}^{m}\left\{1+\binom{m}{1}\gamma^k+\binom{m}{2}\gamma^{2k}+\cdots+\binom{m}{m-1}\gamma^{(m-1)k}\right\},$$

wobei γ eine primitive Wurzel der Gleichung $\gamma^m = 1$ bezeichnet, oder

$$D_m = \prod_{k=1}^{m}\left\{(1+\gamma^k)^m-1\right\}.$$

Soll diese Determinante gleich Null sein, so muss einer ihrer Factoren

$$(1+\gamma^k)^m-1$$

verschwinden. Durch einfache Rechnung, indem man γ in der Form

$$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

annimmt, weist man nach, dass dies nur eintreten kann, wenn m durch 3 theilbar ist*). Daher hat der Satz statt:

Die Congruenz

$$r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{(3ln+1)},$$

wo $3ln+1$ eine Primzahl ist, hat ausser den Lösungen, in denen eine der Zahlen r, s, t durch $3ln+1$ theilbar ist, noch andere, für jeden Werth der Primzahl n.

Wenn aber m nicht durch 3 theilbar ist, so kann, wie die Untersuchung zeigte, die Determinante D_m unmöglich verschwinden. Dieselbe besitzt also dann nur eine endliche Anzahl von Divisoren, und es wird sich eine Grenze g angeben lassen, dergestalt, dass die Determinante durch alle Primzahlen p, bei denen

$$n > g$$

ist, nicht theilbar sein wird.

*) Dies kann man auch leicht ohne Zuhülfenahme des erwähnten Satzes über orthosymmetrische Determinanten einsehen. Das Verschwinden von D_m ist nämlich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Gleichungen $x^m = 1$, $(x+1)^m = 1$ gleichzeitig bestehen.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass zu jeder ungeraden Primzahl n eine solche Primzahl $p = mn+1$ gehöre, welche nicht in D_m enthalten sei. Ich habe aber allgemein diese Vermuthung nicht bestätigen, ja nicht einmal irgend ein wichtiges allgemeines Gesetz auffinden können, wie ein solches bereits von *Libri* im 9. Bande (p. 275) dieses Journals in der Abhandlung: Sur la théorie des nombres ausgesprochen worden ist. Dort behauptet *Libri*, dass, wenn p eine gewisse Grenze überschritten hat, die Congruenz (2.) noch andere Lösungen besitzt als solche, bei denen r oder s oder t durch p theilbar ist, und verspricht, in einer späteren Arbeit den Beweis für die Richtigkeit der Behauptung zu bringen, hat aber meines Wissens nie sein Versprechen eingelöst.

Mag aber diese Behauptung *Libri*s auch als richtig nachgewiesen werden können, so würde die vorhin geäusserte Vermuthung dadurch noch nicht widerlegt sein. Könnte man diese bestätigen, so würden die Untersuchungen in der Nummer 3 über die Gleichung (1.) ganz allgemein gelten, während sonst die *Annahme* gemacht werden muss, dass zur Primzahl n eine andere $p = mn+1$ gehöre, welche nicht in D_m enthalten sei.

Um den folgenden Untersuchungen einen wirklichen Halt unterzulegen beweise ich nachstehenden

Satz II: Ist $p = 2n+1$ oder $4n+1$ oder $8n+1$ oder $16n+1$ eine Primzahl, so erfordert die Congruenz

$$r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{p},$$

dass eine der Zahlen r, s, t durch p theilbar ist.

Dieser Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dass das Bestehen der Congruenz (3.) die Theilbarkeit von u oder v durch p nothwendig zur Folge hat.

Ich mache zuerst folgende Bemerkung, welche allgemein für solche Zahlen m gilt, die durch 4 theilbar sind. Wenn man nämlich den gewünschten Nachweis führen, d. h. zeigen will, dass die Congruenzen (3.) und (4.) keine gemeinsamen Lösungen haben, so braucht man von den vier Fällen, welche sich aus (4.) ergeben, nur die beiden zu berücksichtigen

$$u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1 \quad \text{und} \quad u^{\frac{m}{2}n} \equiv -v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1,$$

da die beiden übrigen Fälle

$$-u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1 \quad \text{und} \quad u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv -1$$

sich auf den zweiten zurückführen lassen.

Denn nimmt man an, dass

$$u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv -1 \pmod{p}$$

ist, so sei u' die Zahl, für welche

$$uu' \equiv 1 \pmod{p}$$

ist. Dann folgt

$$u'^{\frac{m}{2}n} \equiv -1,$$

und durch Multiplication beider Seiten der Congruenz (3.) mit u'^n erhält man

$$1+u'^n \equiv v'^n,$$

wenn man $u'v \equiv v'$ setzt. Da hier

$$v'^{\frac{m}{2}n} \equiv u'^{\frac{m}{2}n} v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1$$

ist, so hat man also den Fall

$$u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv -1$$

zurückgeführt auf den Fall

$$-u^{\frac{m}{2}n} \equiv v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1,$$

und diesen kann man leicht auf denjenigen reduciren, in welchem

$$u^{\frac{m}{2}n} \equiv -v^{\frac{m}{2}n} \equiv 1$$

ist, denn man kann die Congruenz (3.) in die Form setzen:

$$1+(-v)^n \equiv (-u)^n.$$

Nach dieser Vorbemerkung hat man, um die Gültigkeit des Satzes II. darzuthun, nur noch zu beweisen, dass die Congruenz (3.) keine Lösungen besitzt

1)	für $m = 16,$	falls	$u^{8n} \equiv -v^{8n} \equiv 1;$
2)	für $m = 8,\ 16,$	falls	$u^{4n} \equiv -v^{4n} \equiv 1;$
3)	für $m = 4,\ 8,\ 16,$	falls	$u^{2n} \equiv -v^{2n} \equiv 1;$
4)	für $m = 2,\ 4,\ 8,\ 16,$	falls	$u^{2n} \equiv \quad v^{2n} \equiv 1$

ist.

Hat man im ersten dieser Fälle

$$u^{4n} \equiv -1 \pmod{(16n+1)},$$

so folgt, wenn man (3.) auf die vierte Potenz erhebt,

$$4u^n+6u^{2n}+4u^{3n} \equiv v^{4n},$$

und daraus durch Multiplication mit u^{2n}

$$(-6\pm 1)-4u^n+4u^{3n} \equiv 0.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Congruenz mit u^{2n} und addirt dazu die ursprüngliche, so ergiebt sich

$$(-6\pm 1)-8u^n+(-6\pm 1)u^{2n} \equiv 0.$$

Zieht man hiervon die Congruenz

$$(-6\pm 1)(1+2u^n+u^{2n}) \equiv (-6\pm 1)v^{2n}$$

ab, so folgt entweder

$$6u^n \equiv 7v^{2n}$$

oder

$$2u^n \equiv 5v^{2n},$$

also entweder

$$6^4 \equiv 7^4, \quad \text{d. h.} \quad 6^2 \equiv \pm 7^2$$

oder

$$2^4 \equiv 5^4, \quad \text{d. h.} \quad 2^2 \equiv \pm 5^2.$$

Diese Congruenzen sind aber unmöglich.

Ist dagegen

$$u^{4n} \equiv 1, \quad \text{also} \quad u^{2n} \equiv \pm 1 \pmod{(16n+1)},$$

so zeigt sich die Unmöglichkeit, wenn man (3.) quadrirt.

Der zweite der obigen Fälle ist am besten zu erledigen, wenn man (3.) auf die vierte Potenz erhebt. Dann ergiebt sich

$$3+4u^n+6u^{2n}+4u^{3n} \equiv 0.$$

Da aber

$$u^{4n} \equiv 1$$

ist, so kann

$$u^{2n} \quad \text{nur} \quad \equiv \pm 1$$

sein, es folgt also entweder

$$9+8u^n \equiv 0, \quad 9 \equiv -8u^n \equiv \pm 8$$

oder

$$-3 \equiv 0.$$

Die Unmöglichkeit der beiden übrigen Fälle ist am leichtesten einzusehen, wenn man (3.) quadrirt.

Ferner gelten die folgenden Sätze, deren Richtigkeit ähnlich wie die der Sätze I. und II. einzusehen ist und die nachher gebraucht werden.

Satz III: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Congruenz

$$n^{n-1}r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{p},$$

wo p eine ungerade Primzahl von der Form $mn+1$ ist, keine anderen Lösungen besitzt, als die, bei denen r oder s oder t durch p theilbar ist, ist die, dass die orthosymmetrische Determinante

$$D'_m = \begin{vmatrix} 2-n^{(n-1)m} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{m-1} \\ \binom{m}{m-1} & 2-n^{(n-1)m} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & 2-n^{(n-1)m} \end{vmatrix}$$

nicht durch p theilbar ist.

Satz IV^a: Ist $2n+1=p$ eine Primzahl, so hat die Congruenz

$$n^{n-1}r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{p}$$

noch andere Lösungen als die, in denen r oder s oder t durch p theilbar ist, für jeden Werth von n.

Satz IV^b: Ist $4n+1=p$ eine Primzahl, so hat die Congruenz

$$n^{n-1}r^n+s^n+t^n \equiv 0 \pmod{p}$$

für $n>3$ nur solche Lösungen, in denen r oder s oder t durch p theilbar ist.

3.

Nach diesen einleitenden Vorbereitungen wollen wir nun an die gestellte Aufgabe selber herangehen, an die Untersuchung der Gleichung (1.).

Angenommen, es sei die Gleichung (1.) in ganzen Zahlen a, b, c auflösbar, so kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass n eine Primzahl sei und dass je zwei der Zahlen a, b, c relativ prim zu einander seien. Setzt man

$$b+c=u \quad \text{oder} \quad c=u-b,$$

so geht die Gleichung (1.) über in die folgende

$$a^n = u\left[u^{n-1}-\binom{n}{1}u^{n-2}b+\cdots-\binom{n}{2}ub^{n-2}+\binom{n}{1}b^{n-1}\right] = u.v.$$

Die beiden Zahlen u und v sind entweder relativ prim zu einander oder sie haben den grössten gemeinschaftlichen Divisor n. Denn bezeichnet d den grössten gemeinsamen Theiler von u und v, so muss dieser, da v die Form $\varphi u + nb^{n-1}$ hat, auch in nb^{n-1} und daher, da u und b, also auch d und b theilerfremd sind, in n enthalten sein, d. h. $d = 1$ oder $= n$, wie behauptet wurde. Ist $d = n$, sind also u und v durch n theilbar, so hat v die Form $n^2\psi + nb^{n-1}$ und kann daher nicht mehr durch n^2 theilbar sein, da sonst b den Divisor n haben müsste, während doch u und b theilerfremd sind.

Man hat infolge dessen die Darstellungen

$$b + c = u = \varrho^{n-1} a_1^n, \quad v = \varrho a_2^n, \quad a = \varrho a_1 a_2,$$

wo ϱ den Werth n oder 1 hat, je nachdem a durch n theilbar ist oder nicht, und wo ferner a_2 relativ prim zu a_1 und n ist.

Setzt man ferner

$$a - c = u', \quad a - b = u'',$$

so gelangt man in analoger Weise zu den Darstellungen

$$a - c = u' = \sigma^{n-1} b_1^n, \quad v' = \sigma b_2^n, \quad b = \sigma b_1 b_2,$$
$$a - b = u'' = \tau^{n-1} c_1^n, \quad v'' = \tau c_2^n, \quad c = \tau c_1 c_2,$$

wo σ und τ die Werthe 1 oder n haben, und wo ferner b_2 relativ prim zu b_1 und n, c_2 relativ prim zu c_1 und n sind.

Aus den eben aufgestellten Gleichungen ergiebt sich

$$(6.) \qquad \begin{cases} 2a = \varrho^{n-1} a_1^n + \sigma^{n-1} b_1^n + \tau^{n-1} c_1^n, \\ 2b = \varrho^{n-1} a_1^n + \sigma^{n-1} b_1^n - \tau^{n-1} c_1^n, \\ 2c = \varrho^{n-1} a_1^n - \sigma^{n-1} b_1^n + \tau^{n-1} c_1^n. \end{cases}$$

Für irgend 3 Zahlen A, B, C hat nun folgende Identität statt

$$(A+B+C)^n - (A+B-C)^n - (A-B+C)^n - (-A+B+C)^n$$
$$= \sum_{\substack{(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 0,\ \ldots,\ n) \\ \alpha+\beta+\gamma = n}} \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} A^\alpha B^\beta C^\gamma \{1 - (-1)^\alpha - (-1)^\beta - (-1)^\gamma\}.$$

Berücksichtigt man, dass, wenn $\alpha + \beta + \gamma = n$ sein soll, nur die beiden Fälle eintreten können, dass entweder alle drei Zahlen α, β, γ ungerade oder dass eine ungerade, die beiden anderen gerade sind, so kann man für obige Gleichung auch schreiben

$$(7.) \quad \begin{cases} (A+B+C)^n - (A+B-C)^n - (A-B+C)^n - (-A+B+C)^n \\ \qquad = 4nABC \sum_{\varkappa+\lambda+\mu = \frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\varkappa+1)!(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} A^{2\varkappa} B^{2\lambda} C^{2\mu}. \end{cases}$$

Setzt man hierin

$$A = \varrho^{n-1} a_1^n, \quad B = \sigma^{n-1} b_1^n, \quad C = \tau^{n-1} c_1^n,$$

also

$$\begin{aligned} 2a &= A+B+C, \\ 2b &= A+B-C, \\ 2c &= A-B+C, \end{aligned}$$

so folgt aus (7.) unter Hinzuziehung von (1.):

$$(\varrho^{n-1} a_1^n - \sigma^{n-1} b_1^n - \tau^{n-1} c_1^n)^n =$$

$$2^2 . (\varrho\sigma\tau)^{n-1} n a_1^n b_1^n c_1^n \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\varkappa+1)!(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} \varrho^{2(n-1)\varkappa} a_1^{2n\varkappa} \sigma^{2(n-1)\lambda} b_1^{2n\lambda} \tau^{2(n-1)\mu} c_1^{2n\mu}.$$

Je nachdem nun eine der Zahlen a, b, c durch n theilbar ist oder nicht, d. h. je nachdem das Product $\varrho.\sigma.\tau$ gleich n oder 1 ist, hat man folgende Darstellungen

$$(8^a.) \quad \begin{cases} \varrho^{n-1} a_1^n - \sigma^{n-1} b_1^n - \tau^{n-1} c_1^n = 2n a_1 b_1 c_1 Q, \\ \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\varkappa+1)!(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} \varrho^{2(n-1)\varkappa} a_1^{2n\varkappa} \sigma^{2(n-1)\lambda} b_1^{2n\lambda} \tau^{2(n-1)\mu} c_1^{2n\mu} = 2^{n-2} Q^n \end{cases}$$

oder

$$(8^b.) \quad \begin{cases} a_1^n - b_1^n - c_1^n = 2n a_1 b_1 c_1 q, \\ \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\varkappa+1)!(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} a_1^{2n\varkappa} b_1^{2n\lambda} c_1^{2n\mu} = 2^{n-2} n^{n-1} q^n. \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für jedes beliebige n; nun aber wollen wir die Einschränkungen eintreten lassen, dass es eine Primzahl p von der Form $2^\nu n^{k+1}+1$ gebe, welche nicht in $D_{2^\nu n^k}$ enthalten sei, und dass ν relativ prim zu n sein möge. Ich werde zeigen, dass unter dieser Annahme nothwendig eine der Zahlen a, b, c durch n theilbar sein muss.

Denn angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gilt die Darstellung (8^b.), und die Formeln (6.) nehmen die Gestalt an

$$\begin{aligned} 2a &= a_1^n + b_1^n + c_1^n, \\ 2b &= a_1^n + b_1^n - c_1^n, \\ 2c &= a_1^n - b_1^n + c_1^n. \end{aligned}$$

Nach Satz I. folgt nun zunächst aus der Gleichung (1.), wenn man die beiden Seiten derselben nach dem Modul p betrachtet, dass noth-

wendig eine der Zahlen a, b, c durch p theilbar sein muss. Je nachdem nun a oder b oder c die mit dieser Eigenschaft behaftete Zahl ist, hat man

$$a_1^n+b_1^n+c_1^n \equiv 0,$$

oder

$$a_1^n+b_1^n-c_1^n \equiv 0,$$

oder

$$a_1^n-b_1^n+c_1^n \equiv 0,$$

folglich schliesst man wieder mit Hülfe des Satzes I., dass a_1 oder b_1 oder c_1 durch p theilbar sein muss. Je nachdem aber a_1 oder b_1 oder $c_1 \equiv 0 \pmod{p}$ ist, findet man aus der ersten Gleichung von (8^b.) bzw.

$$b_1^n+c_1^n \equiv 0 \quad \text{oder} \quad a_1^n-c_1^n \equiv 0 \quad \text{oder} \quad a_1^n-b_1^n \equiv 0,$$

und daher bzw.

$$b_1^{2n} \equiv c_1^{2n}, \quad a_1^{2n} \equiv c_1^{2n}, \quad a_1^{2n} \equiv b_1^{2n}.$$

Die zweite Gleichung von (8^b.) ist symmetrisch in Bezug auf a_1, b_1, c_1, folglich wird man, wenn man aus ihr allein und den soeben aufgeschriebenen Congruenzen etwas herleiten will, ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass z. B.

$$a_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Dann liefert die zweite Gleichung von (8^b.)

$$\sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} b_1^{2n(\lambda+\mu)} \equiv 2^{n-2} n^{n-1} q^n$$

oder

$$(9.) \qquad b_1^{n(n-3)} \sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} \equiv 2^{n-2} n^{n-1} q^n.$$

Es ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$2^{n-1} = \sum_{\alpha+\beta=n-1} \frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!} = \sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} + \sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda)!(2\mu)!}$$

und

$$0 = \sum_{\alpha+\beta=n-1} \frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!}(-1)^\alpha = -\sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} + \sum_{\lambda+\mu=\frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda)!(2\mu)!}.$$

Durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$\sum_{\lambda+\mu=\frac{n-3}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\lambda+1)!(2\mu+1)!} = 2^{n-2}.$$

Demnach nimmt die Congruenz (9.) die Gestalt an

$$b_1^{n(n-3)} = n^{n-1} q^n;$$

aus dieser folgt durch Erheben auf die $(2^\nu n^k)$-te Potenz

$$b_1^{2^\nu n^k + 1 (n-3)} \equiv n^{2^\nu (n-1) n^k} q^{2^\nu n^k + 1}.$$

Da diese Congruenz zeigt, dass q nicht durch p theilbar sein kann, weil sonst auch die Zahl b_1, die relativ prim zu a_1 ist, den Divisor p hätte, so ergiebt sich mit Hülfe des *Fermat*schen Satzes

$$n^{2^\nu n^k} \equiv 1 \pmod{2^\nu n^{k+1}+1}.$$

Nun hat man aber offenbar

$$2^\nu n^{k+1} \equiv -1$$

und durch Erheben auf die $(2^\nu n^k)$-te Potenz

$$2^{2^\nu \nu n^k} . n^{2^\nu n^k (k+1)} \equiv 1,$$

folglich erhält man

$$2^{2^\nu \nu n^k} \equiv 1,$$

Nach dem kleinen *Fermat*schen Satze ist aber

$$2^{2^\nu n^k + 1} \equiv 1;$$

mithin müsste, da ν und n als theilerfremd vorausgesetzt wurden,

$$2^{2^\nu n^k} \equiv 1,$$

also 2 der $n$ten Potenz einer Zahl t' congruent sein; das hiesse aber, die Congruenz (1.) hätte die Lösungen

$$r \equiv -1, \quad s \equiv -1, \quad t \equiv t'.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen hat aber diese Congruenz keine anderen Lösungen als solche, bei denen r oder s oder t durch p theilbar ist, folglich ist die Annahme, es sei keine der Zahlen a, b, c durch n theilbar, falsch, und es gilt somit der

Satz V: *Gehört zu n eine Primzahl*

$$p = 2^\nu n^{k+1} + 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

welche nicht in $D_{2^\nu n^k}$ enthalten ist, und ist ν relativ prim zu n, so muss, wenn die Gleichung

$$a^n = b^n + c^n \quad \text{für} \quad n > 2$$

in ganzen Zahlen auflösbar sein soll, nothwendig eine der Zahlen a, b, c durch n theilbar sein.

Zusatz zu* V.** ***Ist $2n+1$ ***oder*** $4n+1$ ***oder*** $8n+1$ ***oder*** $16n+1$ ***eine Primzahl, so kann die Gleichung*** $a^n = b^n + c^n$ ***für*** $n > 2$ ***nur dann bestehen, wenn*** a ***oder*** b ***oder*** c ***durch*** n ***theilbar ist.***

Allgemeiner ist aber folgender Satz, dessen Gültigkeit nach den obigen Untersuchungen sofort einleuchtet:

Satz* VI:** ***Gehört zu der ungeraden Primzahl n ***eine ungerade Primzahl*** $p = mn+1$, ***welche weder in der Determinante***

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{m-2} & \binom{m}{m-1} \\ \binom{m}{m-1} & 1 & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{m-3} & \binom{m}{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \binom{m}{4} & \cdots & 1 & \binom{m}{1} \\ \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{m-1} & 1 \end{vmatrix},$$

noch in der Zahl $n^m - 1$ ***enthalten ist, so muss in der Gleichung***

$$a^n = b^n + c^n$$

nothwendig eine der Zahlen a, b, c ***durch*** n ***theilbar sein.***

4.

Man könnte nun auf demselben Wege die vollständige Unmöglichkeit der Gleichung (1.) nachzuweisen versuchen. Dann hätte man also zunächst zu zeigen, dass eine der Zahlen a_1, b_1, c_1 durch p theilbar sein muss, und, wenn dies gelungen wäre, müssten die Gleichungen (8^a.) zu Rathe gezogen werden. Jetzt lässt aber das Verfahren im Stich, denn es fehlt in der zweiten Gleichung von (8^a.) auf der rechten Seite der Factor n, welcher in der zweiten Gleichung von (8^b.) steht. Daraus ersieht man, dass der Beweis auf anderem Wege geführt werden muss. Diesen Weg zu finden, ist mir nicht gelungen.

Sogar schon der Nachweis, dass a_1 oder b_1 oder c_1 durch p theilbar sein müsse, scheint mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Es ist mir erst unter Zuhülfenahme neuer Annahmen geglückt, diesen Nachweis zu führen. Ich will einige derselben anführen.

Macht man über n noch die Annahme, dass die Determinante D'_m durch die Primzahl $mn+1 = p$ nicht theilbar ist, so folgt mit Hülfe der Sätze I. und II. aus der Gleichung (1.) und einer der Gleichungen (6.), wenn

man sie nach dem Modul p betrachtet, dass eine der Zahlen a_1, b_1, c_1 durch p theilbar sein muss. Diese Annahme ist (laut Satz IV^b.) z. B. für den Fall erfüllt, dass $p = 4n+1$ (für $n > 3$) eine Primzahl ist.

Ein anderer specieller Fall, in welchem sich der fragliche Nachweis führen lässt, ist auch der, dass $2n+1$ eine Primzahl ist. Dieser Fall ist mit Hülfe der Gleichungen (8^a.) zu erledigen.

Auch einige Annahmen über die Zahlen a, b, c haben es mir ermöglicht, den Nachweis zu führen, so z. B. die, dass a, b, c wieder $n$te Potenzen sind, dass man also eine Gleichung von der Form

$$x^{n^2} = y^{n^2} + z^{n^2}$$

hat, oder auch die, dass man es mit der Gleichung

$$x^{2n} = y^{2n} + z^{2n}$$

zu thun hat.

Ist nun in einem bestimmten Falle der Nachweis geführt, dass eine der Zahlen a_1, b_1, c_1 durch p theilbar sein müsse, so ist leicht zu zeigen, dass dieselbe Zahl auch durch n theilbar sein müsse, und zwar muss dazu erst bewiesen werden, dass Q relativ prim zu 2, n, a_1, b_1, c_1 ist.

Zum Schluss will ich noch bemerken, dass ich die Unmöglichkeit der Gleichung (1.) einerseits dadurch einzusehen versucht habe, dass ich die Gleichungen (8^a.) nach den Potenzen des Moduls p betrachtet habe, andererseits dadurch, dass ich die Eigenschaften der Divisoren von Q, $a_1^n \pm b_1^n$, $b_1^n \pm c_1^n$, $a_1^n \pm c_1^n$ geprüft habe. Da mich aber diese Untersuchungen noch zu keinem erheblichen Resultat geführt haben, so will ich hiermit die Arbeit beschliessen.

Berlin, im November 1893.

Ueber den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungssystems.

(Von Herrn *K. Th. Vahlen.*)

Bezeichnen wir mit $f\overset{\mu}{(}x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine ganze rationale Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vom Grade μ, so besteht bekanntlich der Satz:

Die Eliminationsresultante des Gleichungssystems:

$$f_i\overset{\mu_i}{(}x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

ist eine in den Coefficienten der Function f_i ganze rationale Function vom Grade $\mu_1\mu_2\ldots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{m+1}$. Nehmen wir an, dass die Coefficienten der Functionen f_i ganze rationale Functionen von einer Anzahl Variablen $y_1, y_2, \ldots$ sind und dass f_i dieselben in dem Grade ν_i enthält, so können wir den obigen Satz, nach Einführung einer leicht verständlichen Bezeichnung, wie folgt aussprechen:

Durch Elimination der Variablen x aus den Gleichungen:

$$f_i\overset{\mu_i}{(}x_1, x_2, \ldots, x_m; \overset{\nu_i}{y_1, y_2, \ldots}) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

erhält man eine ganze rationale Function der Variablen y vom Grade

$$\sum_i \mu_1\mu_2\ldots\mu_{i-1}\nu_i\mu_{i+1}\ldots\mu_{m+1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1)$$

Sind im besondern die Variablen y die Coefficienten einer der Functionen, f_i, selbst, so ist $\nu_i = 1$, $\nu_k = 0$ $(k \gtrless i)$, man kommt also auf den früheren Satz zurück.

Die Einführung der Variablen y bietet den Vortheil, dass man jetzt die aus nicht nur $m+1$, sondern aus $m+n$ Gleichungen durch Elimination von m Variablen erhaltene Resultante betrachten kann. Diese Resultante wird nicht durch eine, sondern durch ein System von Gleichungen definirt; sie ist also nicht mehr ein Gebilde erster, sondern höherer, $n$ter, Stufe. Die wichtigste Frage ist jetzt:

Von welchem Grade ist die Eliminationsresultante des Systems:

$$f_i\left(x_1,\ x_2,\ \overset{\mu_i}{\ldots},\ x_m;\ y_1,\ y_2,\ \overset{\nu_i}{\ldots}\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

in den Variablen y; d. h. wenn man zu den Gleichungen $f_i = 0$ so viele in den y lineare, die x nicht enthaltende Gleichungen hinzufügt, dass sich daraus $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ als lineare Functionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ berechnen lassen, wieviel Werthsysteme für $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots)$ erhält man alsdann? Ersetzt man in den $f_i = 0$ die Variablen $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ durch lineare Functionen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$, so handelt es sich darum, die Anzahl der Werthsysteme zu finden, die dem System genügen:

$$f_i\left(x_1,\ x_2,\ \overset{\mu_i}{\ldots},\ x_m;\ y_1,\ y_2,\ \overset{\nu_i}{\ldots},\ y_n\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

eine Frage, die durch den Satz beantwortet wird:

Die Anzahl der Werthsysteme, die den Gleichungen:

$$f_i\left(x_1,\ x_2,\ \overset{\mu_i}{\ldots},\ x_m;\ y_1,\ y_2,\ \overset{\nu_i}{\ldots},\ y_n\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

genügen, ist gleich $\Sigma\mu_1\mu_2\ldots\mu_m\nu_{m+1}\nu_{m+2}\ldots\nu_{m+n}$, ***wo die Summe über alle aus*** m ***Zahlen*** μ ***und*** n ***Zahlen*** ν ***mit lauter verschiedenen Indices zu bildenden Producte zu erstrecken ist.***

Für $n = 1$ bekommen wir aus diesem den früheren Satz; wir setzen jedoch im Folgenden die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes nur für den Fall $n = 0$ voraus. Wir brauchen dann nur zu zeigen, dass aus der Gültigkeit des Satzes für $(m, n-1)$ und für $(m-1, n)$ die Gültigkeit desselben für (m, n) sich ergiebt.

Wir betrachten die durch die $m+n-1$ Gleichungen:

$$f_i\left(x_1,\ x_2,\ \overset{\mu_i}{\ldots},\ x_m;\ y_1,\ y_2,\ \overset{\nu_i}{\ldots},\ y_n\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n-1)$$

in der $(m+n)$-fachen Mannigfaltigkeit der Variablen x und y definirte einfache Mannigfaltigkeit oder Linie L.

Geben wir der Variablen x_h einen festen Werth, so finden wir aus jenen $m+n-1$ Gleichungen, der Voraussetzung gemäss,

$$\Sigma\mu_1\mu_2\ldots\mu_{m-1}\nu_m\nu_{m+1}\ldots\nu_{m+n-1} = \nu$$

Werthsysteme für die übrigen Variablen, also z. B. ν Werthe für y_k oder für x_k. Geben wir der Variablen y_k einen festen Werth, so finden wir ebenso

$$\Sigma\mu_1\mu_2\ldots\mu_m\nu_{m+1}\ldots\nu_{m+n-1} = \mu$$

Werthe z. B. für y_h oder für x_h. Durch Elimination von $m+n-2$ Variablen erhalten wir also Gleichungen der Art:

$$\binom{\nu}{x_h,\ x_k} = 0, \quad \binom{\mu\ \ \nu}{x_h;\ y_k} = 0, \quad \binom{\mu}{y_h,\ y_k} = 0,$$

in denen der Einfachheit halber die Functionszeichen fortgelassen sind. In den Gleichungen $\binom{\nu}{x_h,\ x_k} = 0$, $\binom{\mu}{y_h,\ y_k} = 0$ mögen die Glieder höchster Dimension wirklich alle vorkommen, was durch lineare Transformationen im allgemeinen stets zu bewirken ist. Würden in einer oder mehreren der Gleichungen $\binom{\nu}{x_h,\ x_k} = 0$, $\binom{\mu}{y_h,\ y_k} = 0$, $\binom{\mu\ \ \nu}{x_h;\ y_k} = 0$ alle Glieder höchster Dimension in den x oder in den y fehlen, so würde die Linie L zum Theil im Unendlichen liegen, was ausgeschlossen werden möge.

Verschwindet für $x_m = \xi_m$ der Coefficient von y_n^ν in der Gleichung $\binom{\mu\ \ \nu}{x_m;\ y_n} = 0$, so ist $x_m = \xi_m$ die Gleichung einer Asymptote der ebenen Linie $\binom{\mu\ \ \nu}{x_m;\ y_n} = 0$. Diese Linie hat μ solcher Asymptoten, und ν Asymptoten mit Gleichungen der Form $y_n = \eta_n$. Jeder dieser Asymptoten entspricht eine Asymptote von L. Um z. B. die zu $x_m = \xi_m$ gehörige Asymptote zu finden, bestimmen wir x_h aus den beiden Gleichungen:

$$\binom{\nu}{x_h,\ x_m}_{x_m=\xi_m} = 0, \quad \binom{\mu\ \ \nu}{x_h;\ y_n}_{y_n=\infty} = 0.$$

Aus ihnen ergiebt sich x_h eindeutig und endlich, $x_h = \xi_h$. Ferner ergiebt sich y_k aus $\binom{\nu\ \ \mu}{y_k;\ x_m}_{x_m=\xi_m} = 0$, $\binom{\mu}{y_k,\ y_n} = 0$ als rationale Function von y_n, $y_k = \dfrac{a y_n^\lambda + b y_n^{\lambda-1} + \cdots}{c y_n^{\lambda'} + \cdots}$. Da aber aus $\binom{\mu}{y_k,\ y_n} = 0$ folgt, dass $\dfrac{y_k}{y_n}$ für unendliche Werthe von y_n endlich bleibt, so ist $\lambda = \lambda' + 1$, also für wachsende Werthe von y_n ist $y_k = \dfrac{a}{c} y_n + \dfrac{b}{c} = a_k . y_n + b_k$. Die Gleichungen der Asymptote sind daher:

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ \ldots,\ x_m = \xi_m,\ y_1 = a_1 y_n + b_1,\ y_2 = a_2 y_n + b_2,\ \ldots,\ y_{n-1} = a_{n-1} y_n + b_{n-1}.$$

Setzen wir diese Werthe in $f_{m+n} = 0$ ein, so erhalten wir ν_{m+n} Werthe für y_n, so dass von den $\mu_{m+n} + \nu_{m+n}$ Schnittpunkten der Asymptote mit $f_{m+n} = 0$ nur ν_{m+n} im Endlichen liegen. Die übrigen μ_{m+n} im Unendlichen gelegenen Schnittpunkte sind aber zugleich Schnittpunkte von L mit $f_{m+n} = 0$. Den μ Asymptoten $x_h = \xi_h$, $y_k = a_k y_n + b_k$ $(h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ entsprechen

daher $\mu\mu_{m+n}$ unendlich ferne Schnittpunkte von L mit $f_{m+n}=0$; ebenso entsprechen den ν Asymptoten $x_h = a_h x_m + b_h$, $y_k = \eta_k$, $(h=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$, im ganzen $\nu\nu_{m+n}$ unendlich ferne Schnittpunkte. Da die Linie L keine anderen unendlich fernen Punkte hat, als die auf ihren Asymptoten gelegenen, so ist $\mu\mu_{m+n}+\nu\nu_{m+n}$ die Anzahl aller unendlich fernen Schnittpunkte von L mit $f_{m+n}=0$. Von den sämmtlichen $(\mu+\nu)(\mu_{m+n}+\nu_{m+n})$ Schnittpunkten, welche die Linie L von der Ordnung $\mu+\nu$ mit der Mannigfaltigkeit $f_{m+n}=0$ von der Ordnung $\mu_{m+n}+\nu_{m+n}$ gemein hat, liegen daher nur

$$\mu\nu_{m+n}+\nu\mu_{m+n} = \Sigma\mu_1\mu_2\ldots\mu_m\nu_{m+1}\ldots\nu_{m+n}$$

im Endlichen, was zu beweisen war.

Für die offenbar grosse Anwendbarkeit dieses Satzes, der sich übrigens leicht von zwei auf drei oder mehr Reihen von Variablen ausdehnen lässt, wollen wir hier nur ein Beispiel beibringen.

Durch die Gleichungen:

$$f_i\Big(x_1, x_2, \overset{\mu_i}{\ldots}, x_n;\ y_1, y_2, \overset{\nu_i}{\ldots}, y_n\Big) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

wird eine algebraische Correspondenz zwischen der Mannigfaltigkeit der Variablen x und der Mannigfaltigkeit der Variablen y festgesetzt. Für diese Correspondenz sind die Zahlen μ_i, ν_i nicht charakteristisch, da sie sich ändern, wenn das Gleichungssystem $f_i=0$ durch ein ihm äquivalentes ersetzt wird.

Charakteristisch für die Correspondenz sind dagegen die Gradzahlen derjenigen Gebilde der y-Mannigfaltigkeit, welche den ebenen Gebilden der x-Mannigfaltigkeit entsprechen. Eine ebene m-fache Mannigfaltigkeit der Variablen x erhalten wir, wenn wir die Variablen x durch m von ihnen linear ausdrücken. Unser Satz liefert dann unmittelbar den Grad g_m der entsprechenden m-fachen Mannigfaltigkeit der Variablen y, nämlich:

$$g_m = \Sigma\mu_1\mu_2\ldots\mu_m\nu_{m+1}\nu_{m+2}\ldots\nu_n.$$

Umgekehrt entspricht einer ebenen m-fachen Mannigfaltigkeit der Variablen y eine m-fache Mannigfaltigkeit der Variablen x vom Grade:

$$\Sigma\nu_1\nu_2\ldots\nu_m\mu_{m+1}\mu_{m+2}\ldots\mu_n = g_{n-m}.$$

Die Anzahl der Punkte (x), welche mit ihrem correspondirenden Punkte (y) zusammenfallen, oder auch, welche in vorgeschriebener Weise linear von ihm abhängen, ist:

$$(\mu_1+\nu_1)(\mu_2+\nu_2)\ldots(\mu_n+\nu_n) = g_0+g_1+g_2+\cdots+g_n,$$

also gleich der Summe der charakteristischen Zahlen.

Dieses Correspondenzprincip ist für den Fall $n = 1$ von *Chasles*, für die Fälle $n = 2, 3$ von *Zeuthen*, für beliebige n von *Caporali* durch geometrische Betrachtungen bewiesen worden.

Unser Satz, mit dem die algebraische Grundlage dieses Princips gewonnen ist, liefert aber nicht nur dieses, sondern ebenso leicht ein allgemeineres, nämlich:

Hat man zwei Correspondenzen zwischen den Punkten der x-Mannigfaltigkeit und denen der y-Mannigfaltigkeit, so giebt es $g_0h_n + g_1h_{n-1} + \cdots + g_nh_0$ ***Paare correspondirender Punkte, die nach beiden Correspondenzen einander entsprechen; dabei sind*** $g_0, g_1, \ldots, g_n$ ***die charakteristischen Zahlen der einen,*** $h_0, h_1, \ldots, h_n$ ***die der anderen Correspondenz.***

Dieser allgemeine Satz ergiebt sich auch aus dem besonderen, wenn man die Correspondenz zweier Punkte der x-Mannigfaltigkeit betrachtet, von denen der eine nach der einen, der andere nach der anderen Correspondenz demselben Punkte der y-Mannigfaltigkeit entspricht. Diese Correspondenz besitzt offenbar die charakteristischen Zahlen: $g_0h_n, g_1h_{n-1}, \ldots, g_nh_0$, woraus also der obige Satz folgt.

Berlin, im Juni 1893.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1897.

Die von *Monge, Ampère* und *Darboux* herrührenden Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung finden bekanntlich nur für solche Gleichungen Anwendung, die mit anderen Gleichungen Lösungen gemein haben, welche nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Es geht andererseits aus *Lies* Untersuchungen über unendliche Gruppen hervor, dass Gleichungen, die eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen gestatten, im Allgemeinen zu anderen Gleichungen in der soeben besprochenen Beziehung (Involutionsbeziehung) stehen*). Die Gesellschaft wünscht

> dass die aus dieser Bemerkung fliessenden Integrationsmethoden entwickelt und an möglichst instructiven und vollständig durchgeführten Beispielen illustrirt werden.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1894 Professor Dr. H. Lipsius, Weststrasse Nr. 89) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

*) Vgl. *Darboux*, Journal de l'école normale 1870. — *Lie*, Berichte der Kgl. Sächs. Ges. der Wissensch., 1891—94.

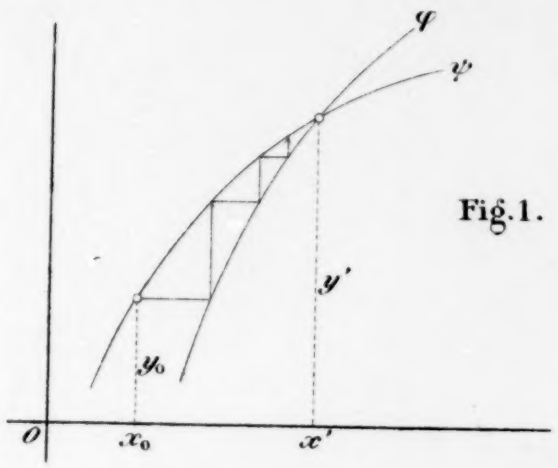


Fig. 1.

Fig. 2.

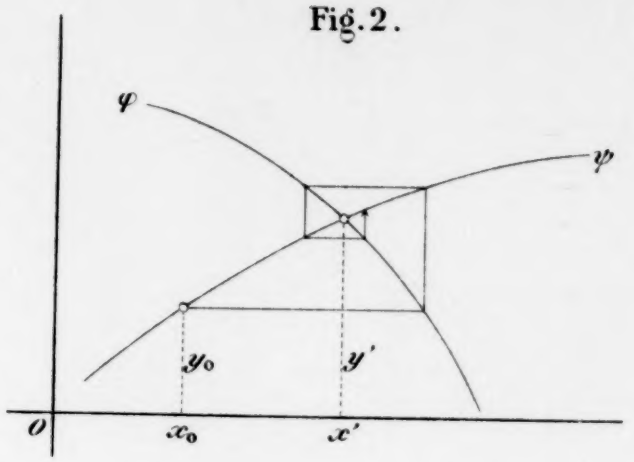
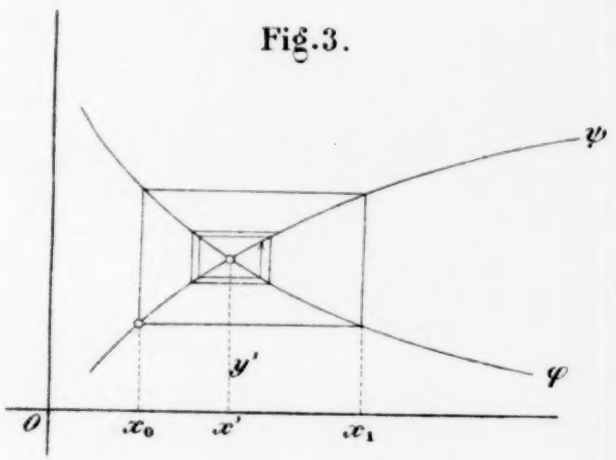


Fig. 3.



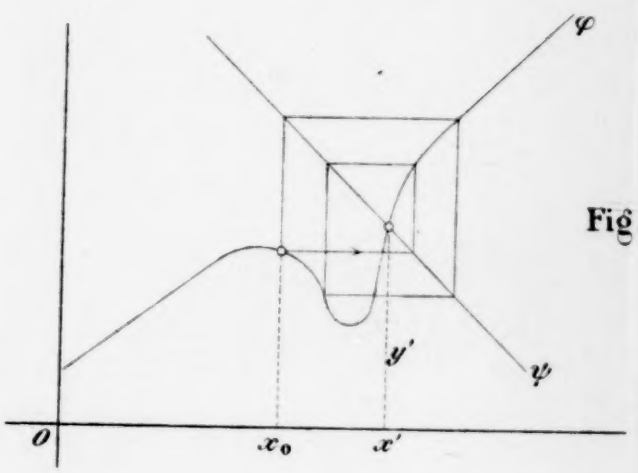


Fig. 4.

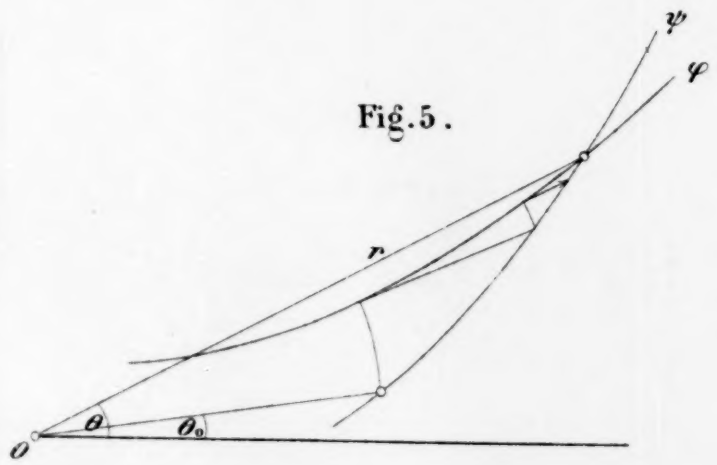


Fig. 5.

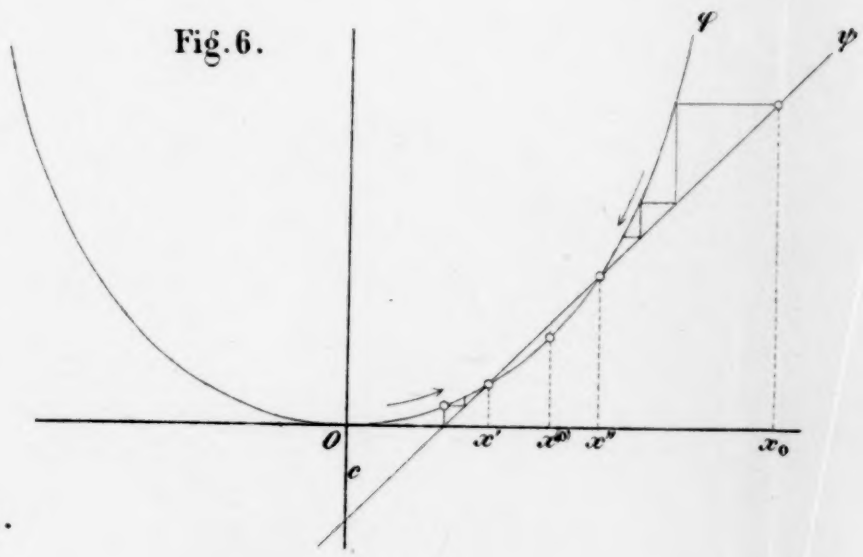


Fig. 6.

Fig. 11.

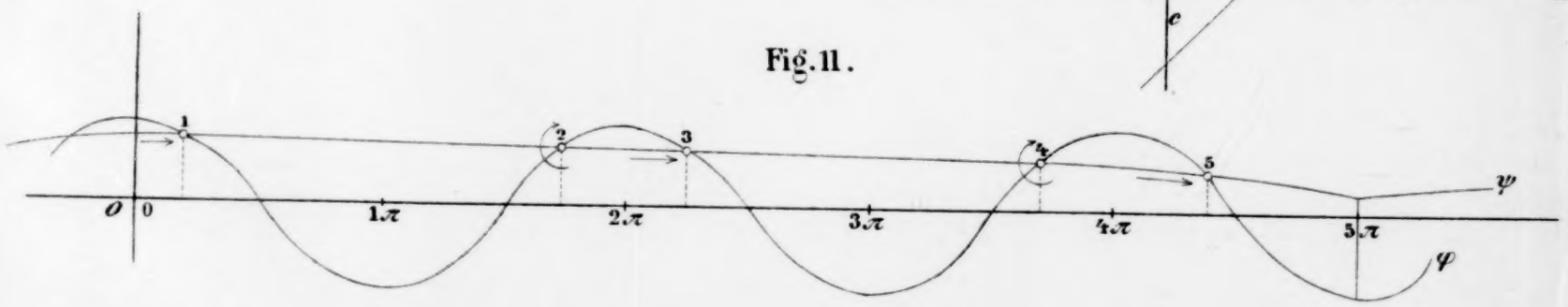


Fig. 7.

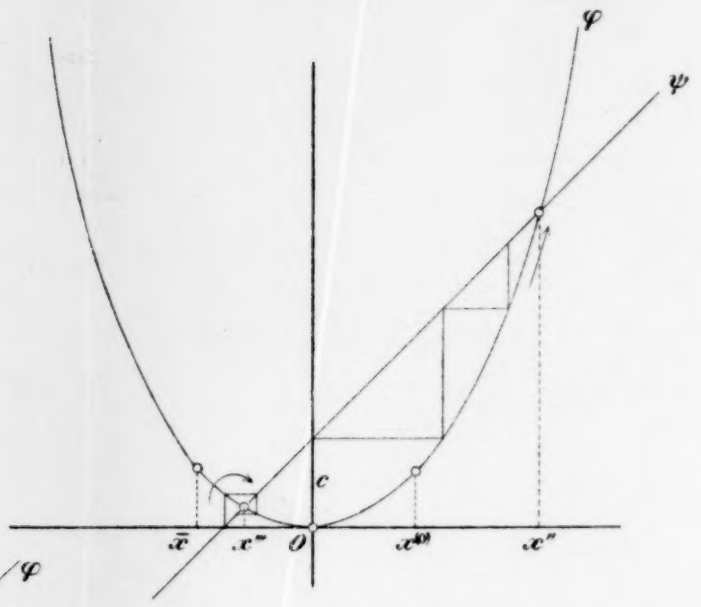


Fig. 8.

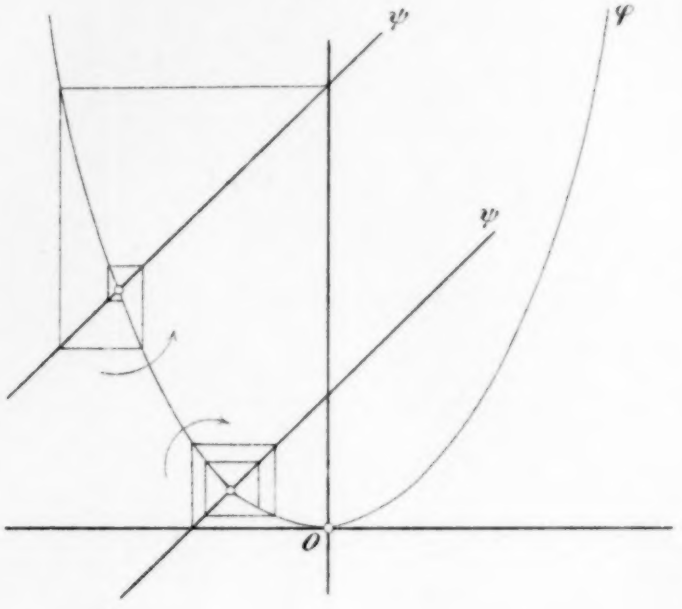
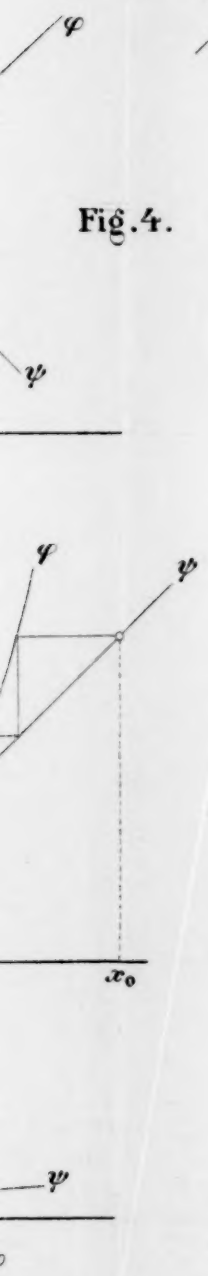


Fig. 4.



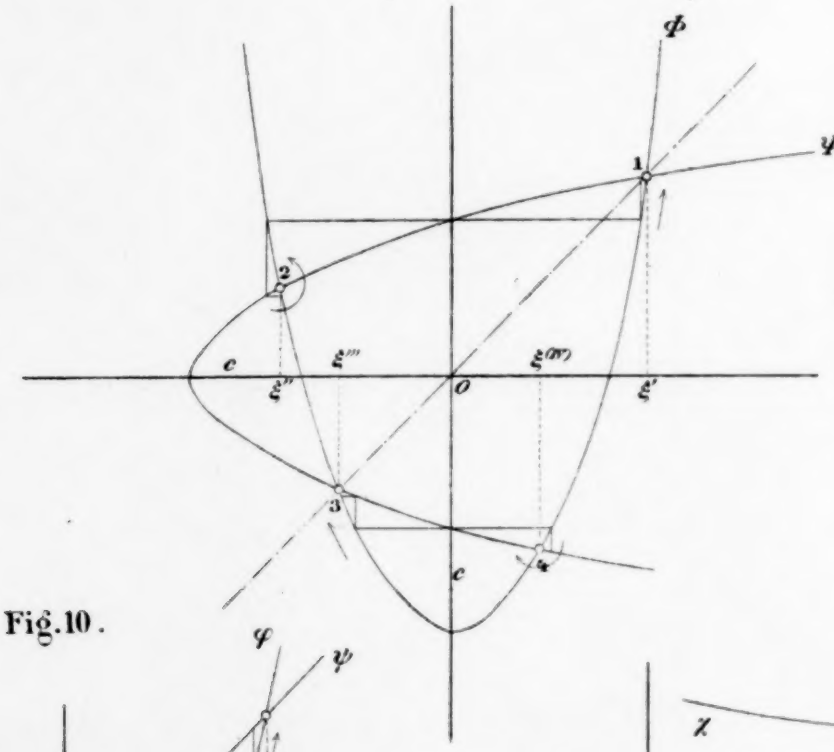


Fig. 9.

Fig. 10.

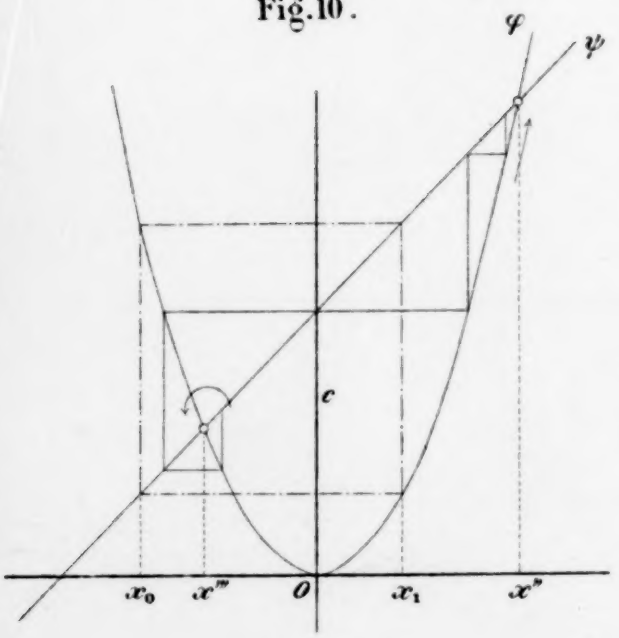
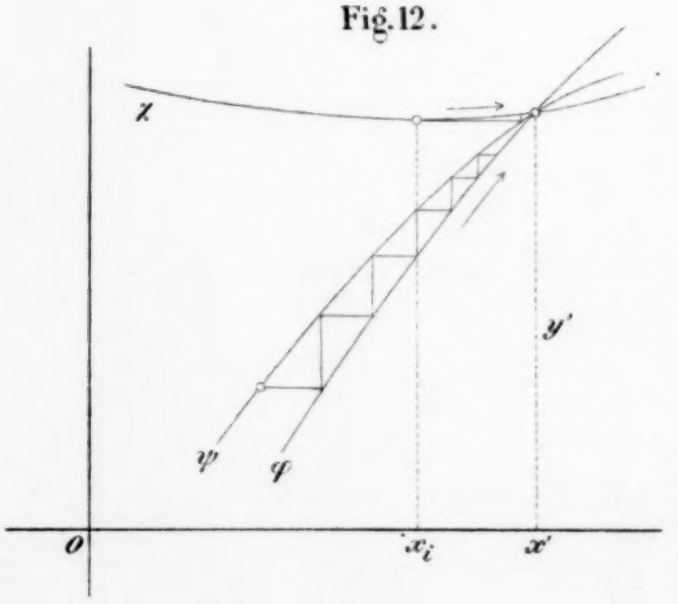


Fig. 12.



Lith. Anst. v. L. Kraatz, Berlin.

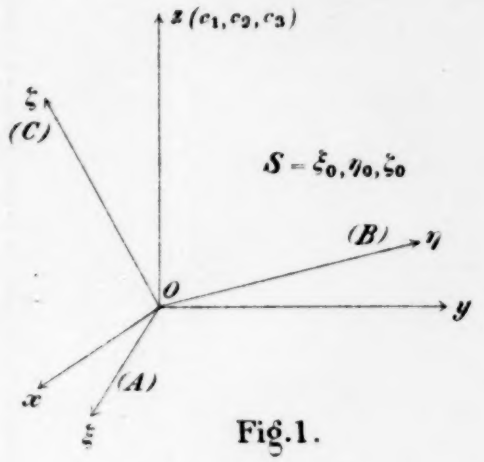


Fig. 1.

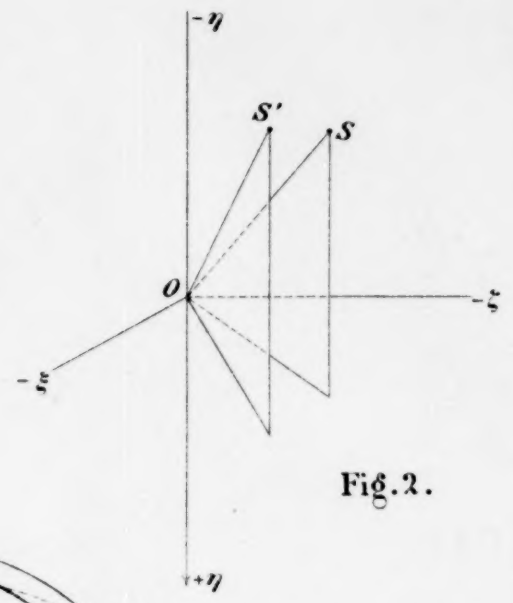


Fig. 2.

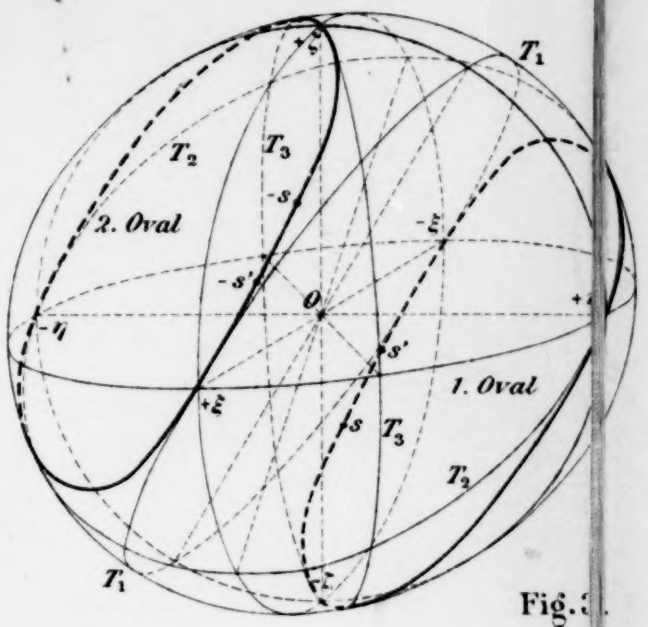


Fig. 3.

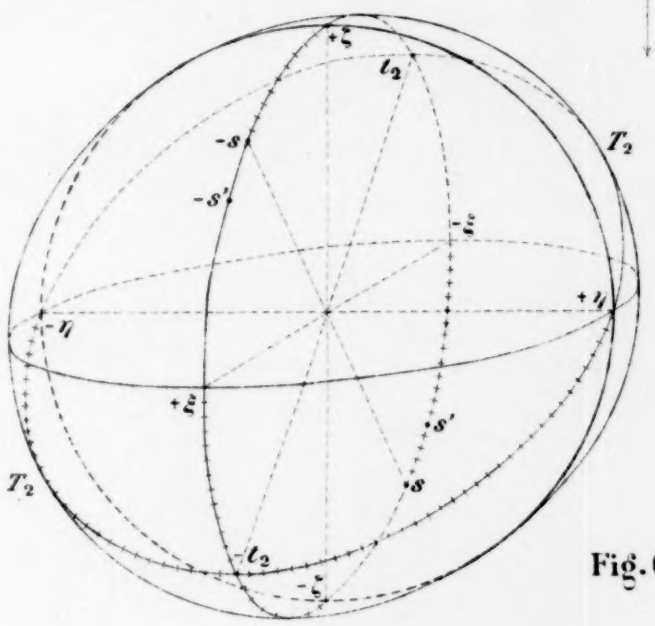


Fig. 6.

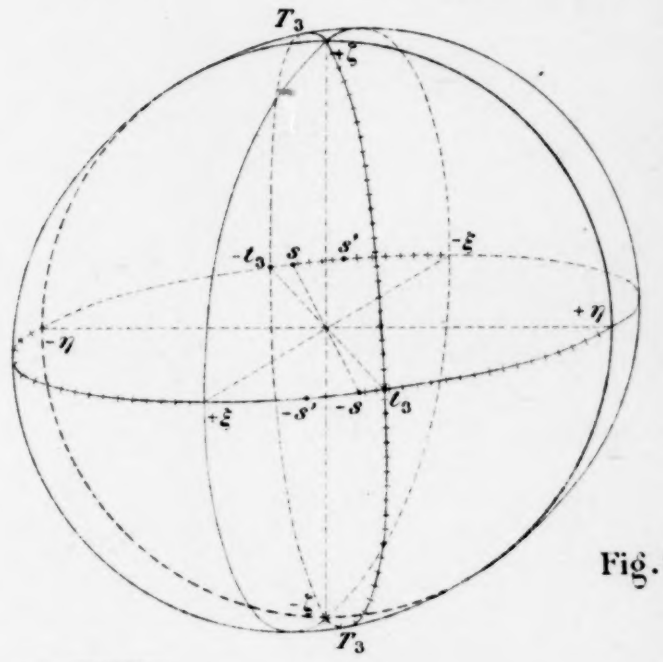


Fig. 7.

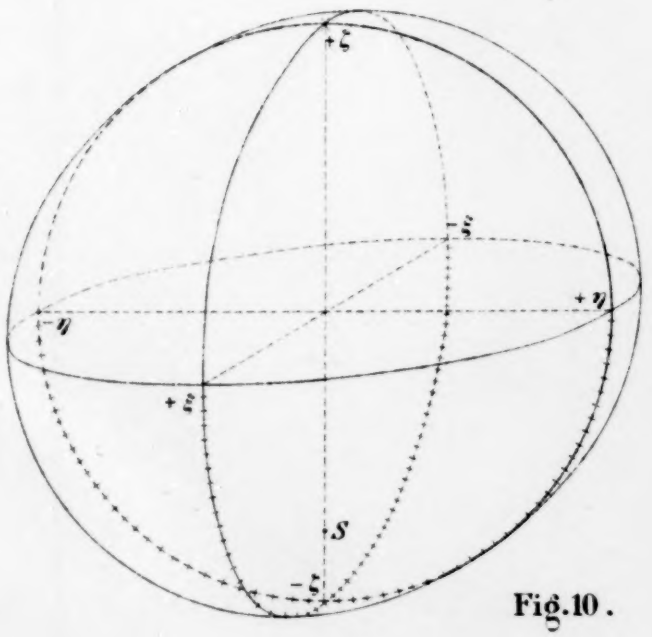


Fig. 10.

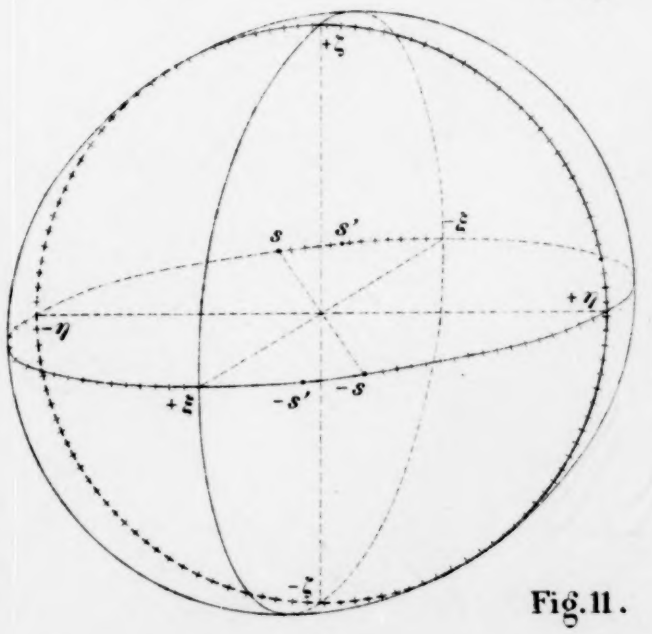
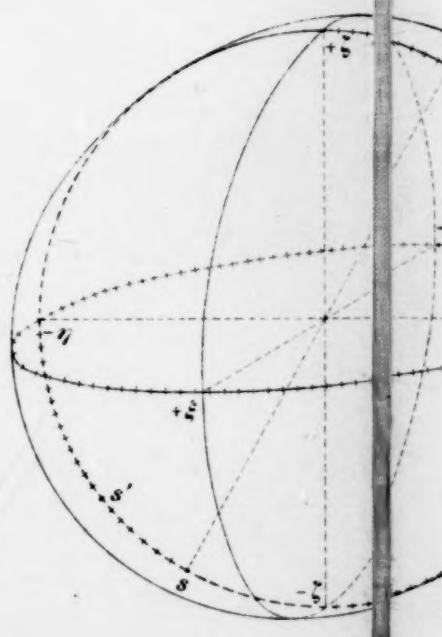


Fig. 11.



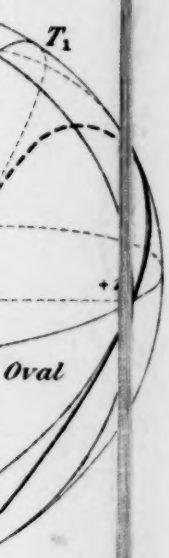


Fig. 3.

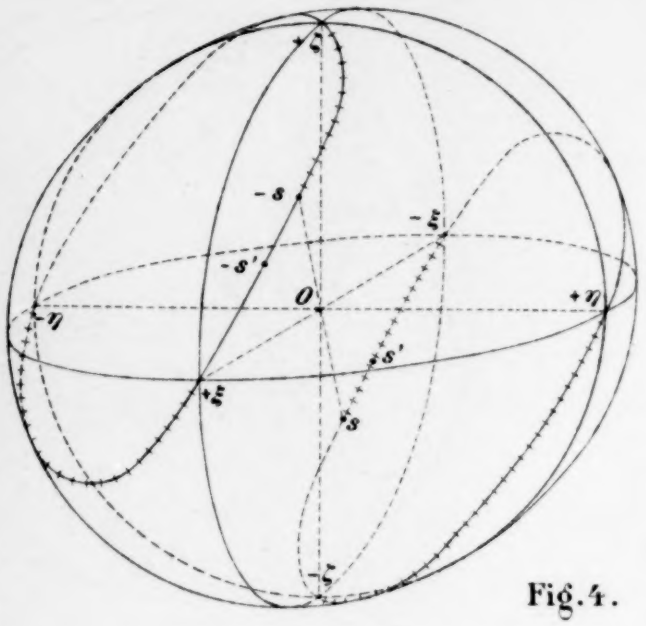


Fig. 4.

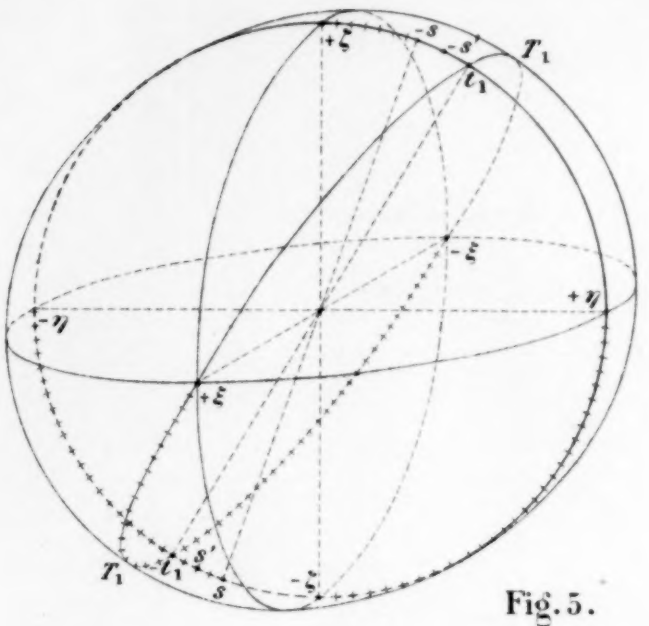


Fig. 5.

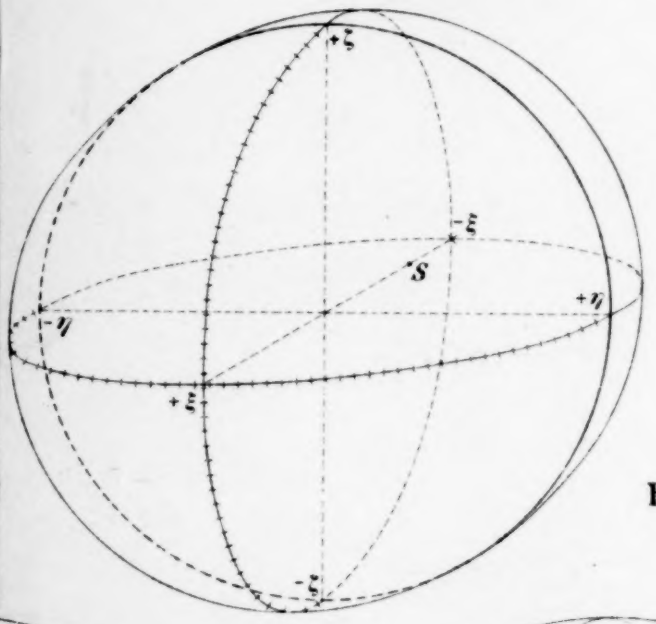


Fig. 8.

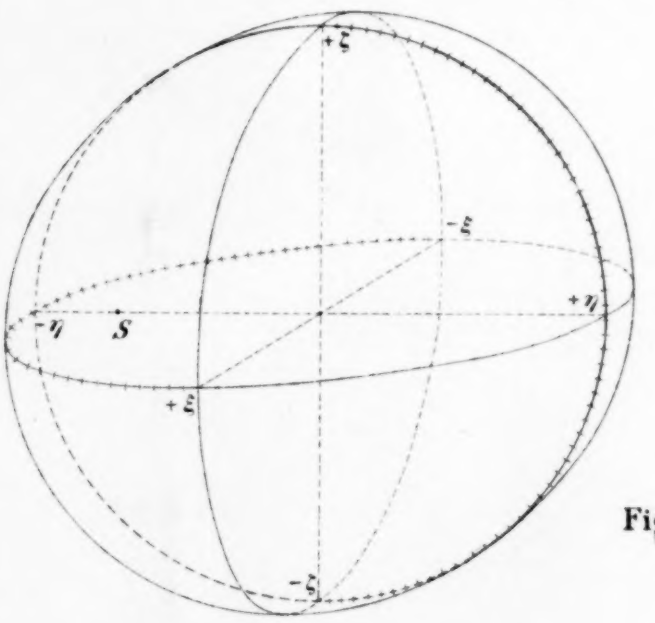


Fig. 9.

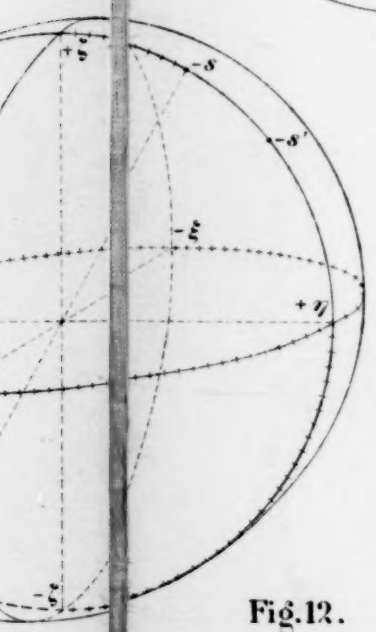


Fig. 12.

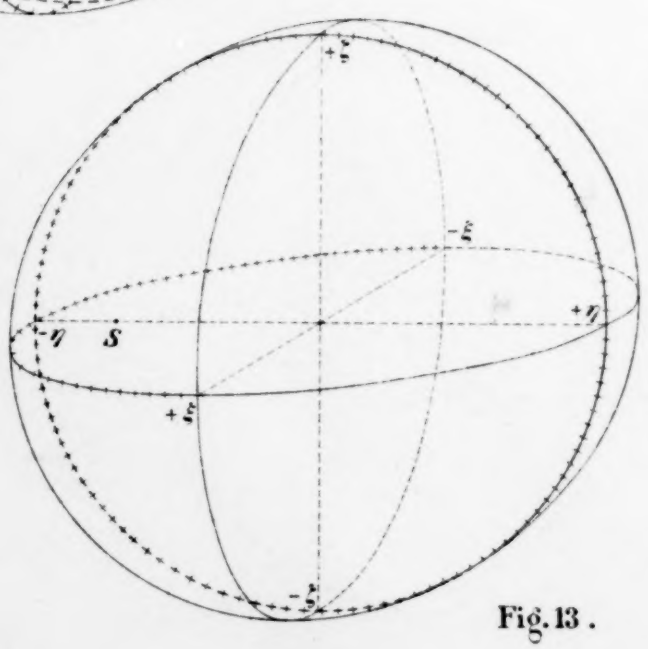


Fig. 13.

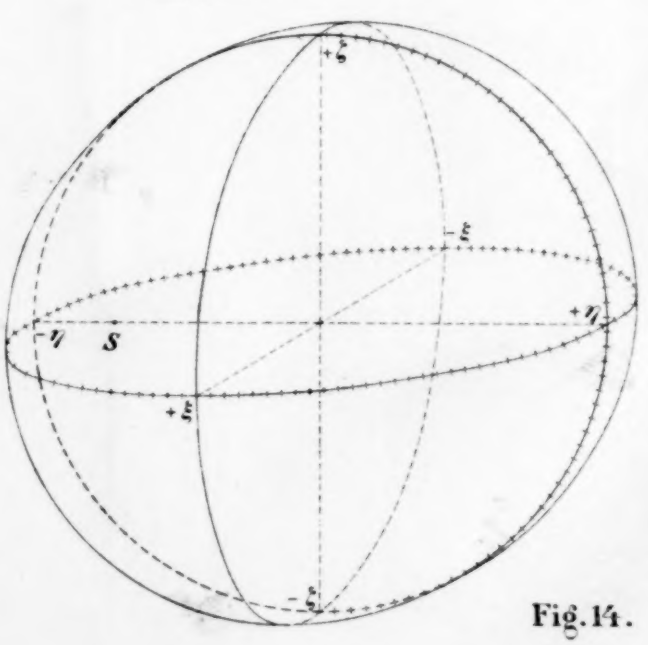


Fig. 14.

Lith. Anst. v. L. Kraatz, Berlin.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Unter Mitwirkung der Herren

Weierstrass und **von Helmholtz**

herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 113.

Heft IV.

Mit zwei Figurentafeln.

Ausgegeben den 10. Juli.

Berlin, 1894.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Hierzu eine Beilage der Buchhandlung von Felix L. Dames in Berlin.

5152c

Band 113. Heft IV.
Inhaltsverzeichniss.

W. Heymann. Theorie der An- und Umläufe und Auflösung der Gleichungen vom vierten, fünften und sechsten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen. (Hierzu Tafel 1.) . . . . . Seite 267

K. Hensel. Ueber die Classification der nicht homogenen quadratischen Formen und der Oberflächen zweiter Ordnung. . . . . — 303

O. Staude. Ueber permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt. (Hierzu Tafel 2.) . . . . . — 318

E. Wendt. Arithmetische Studien über den „letzten“ *Fermat*schen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist. . . . . — 335

K. Th. Vahlen. Ueber den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungssystems. . . . . — 348

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1897. . . . . — 353

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin S.W., Anhaltstrasse 12.